Untersuchung der Stabilität der Sterbenswahrscheinlichkeiten der ersten Altersjahre auf Grund der preußischen Statistik.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät der

Georg-Augusts-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Karl Stalmann
aus Braunschweig.

Göttingen 1914.

Angenommen von der historisch-philologischen Abteilung.

Tag der mündlichen Prüfung: 18. Februar 1914.

Referent: Geh. Ober-Reg.-Rat Prof. Dr. W. Lexis.

Druck von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

I. Untersuchung der Stabilität der Sterbenswahrscheinlichkeiten der ersten sechs Altersjahre in Preußen für die Geburtsjahre 1891 bis 1905 5

II. Behandlung der Senkung der Sterblichkeit in den Jahren 1891 bis 1910 mit Hilfe von Stabilitätsuntersuchungen 57

III. Absterbeordnung der ersten sechs Altersklassen für die Generation von 1891 und für die von 1905 69

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548110_0070

I.

Die durch massenstatistische Erhebungen erhaltenen Zahlenreihen verändern sich im Laufe der Zeit im allgemeinen nur langsam, so daß man von einer gewissen Stabilität dieser Reihen sprechen kann. Es ist nun ohne Frage von Interesse, den Grad der Stabilität solcher Reihen zu kennen. Daher hatte es sich die wissenschaftliche Statistik zur Aufgabe gemacht, die Stabilität zahlenmäßig festzulegen. Es handelte sich dabei hauptsächlich um Reihen von Verhältniszahlen, durch die die meisten statistischen Erscheinungen charakterisiert werden.

Lexis[1]) löste die Frage, indem er die Verhältniszahlen als empirische Näherungswerte einer mathematischen Wahrscheinlichkeit ansah. Aus dieser Tatsache ergibt sich nun ganz von selbst die Stabilitätstheorie solcher Verhältniszahlen.

Nach der Wahrscheinlichkeitstheorie berechnet sich der wahrscheinliche Fehler zu

$$r = \varrho \sqrt{\frac{2\,v(1-v)}{g}},$$

wo ϱ die Konstante 0,4769, v einen möglichst genauen Näherungswert der zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeit und g die gesamte Beobachtungszahl, die sogenannte Grundzahl, bedeutet.

Andererseits berechnet sich dieser Fehler auch direkt aus den gegebenen Einzelwerten zu

$$R = \varrho \sqrt{\frac{2\,[\delta^2]}{n-1}},$$

wo $[\delta^2]$ die Summe der Quadrate der Abweichungen der gegebenen Einzelwerte vom Mittelwerte und n die Anzahl der Einzelwerte bezeichnet.

Liegt der Erscheinung eine konstante Wahrscheinlichkeit zugrunde, so haben wir völlige Analogie mit einem korrekten

[1]) Zuerst erschienen in Conrads Jahrbüchern, Bd. 32, S. 60 ff. (1879).

Zufallsspiel mit konstanten Chancen. Hier ergibt die Wahrscheinlichkeitstheorie

$$R = r,$$

oder

$$\frac{R}{r} = Q = 1$$

als Kriterium maximaler Stabilität. Die Schwankungen sind in diesem Falle ganz unwesentlich. Man nennt diese minimale Zerstreuung der Einzelwerte um den Mittelwert eine normale Dispersion.

Annähernd maximale Stabilität hat man vielfach gefunden bei relativen Sterbenswahrscheinlichkeiten, z. B. bei den Untersuchungen über das Geschlechtsverhältnis der Verstorbenen[1]) in den ersten Lebensjahren.

Nun besitzen aber wohl alle statistischen Verhältniszahlen im Laufe der Jahre keine völlig konstante Grundwahrscheinlichkeit. Dies ist vor allem bei den Reihen der absoluten Sterbenswahrscheinlichkeiten der Fall, mit denen wir uns hier zu beschäftigen haben. Man sehe sich nur die Reihe der Sterbenswahrscheinlichkeiten für Knaben im Alter von 0 bis 1 Jahr während der Jahre 1891 bis 1905 in Preußen[2]) an, um die Änderung der Wahrscheinlichkeit zu beobachten.

Durch die Veränderung der Grundwahrscheinlichkeit wird sich eine neue Schwankung zu jener unwesentlichen gesellen. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung gibt in diesem Falle als Maß für die Totalschwankung

$$R = \sqrt{r^2 + p^2},$$

wo p eben jene Schwankung ist, die auf der Veränderung der Grundwahrscheinlichkeit beruht. Man nennt diese die physische Schwankungskomponente, welche durch allerhand äußere Ursachen hervorgerufen wird. Aus obiger Gleichung folgt als Stabilitätskriterium für Reihen mit nicht konstanter Grundwahrscheinlichkeit

$$\frac{R}{r} = Q > 1.$$

Dies bezeichnet man wohl auch als subnormale Stabilität im Gegensatz zu normaler Stabilität für $Q = 1$[3]). Das Maximum

[1]) Lexis, Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik 1903, S. 197 ff.

[2]) Siehe unten S. 15.

[3]) Kaufmann, Theorie und Methoden der Statistik 1913, S. 83.

der Stabilität — $Q = 1$ — ist demnach nicht erreicht. Man spricht in diesem Falle im Hinblick auf die Verteilung der Einzelwerte um den Mittelwert von „übernormaler Dispersion“, deren Maß jene physische Schwankungskomponente ist, für welche wir nach Elimination von R aus unseren Formeln

$$p = r\sqrt{Q^2 - 1}$$

erhalten.

Durch die Änderung der Grundwahrscheinlichkeit werden nun der Anwendbarkeit des gefundenen Kriteriums der Stabilität gewisse Bedingungen auferlegt, über die wir uns erst Klarheit verschaffen müssen. In der Formel

$$r = \varrho\sqrt{\frac{2v(1-v)}{g}}$$

nimmt man für v einen Mittelwert. Daher dürfen die äußersten Grenzen, in denen sich v bewegt, nicht so weit auseinander liegen, daß der Ausdruck r nicht mehr mit praktisch genügender Genauigkeit aus einem einzigen, mittleren Werte von v berechnet werden kann. Wir können demnach bei den Reihen der absoluten Sterbenswahrscheinlichkeiten, welche hier infolge abnehmender Kindersterblichkeit eine evolutorische Tendenz zeigen, die Stabilität nur für eine mäßige Anzahl von Jahren, etwa für 15, prüfen.

Weiter sagt die Formel für die physische Schwankung

$$p = r\sqrt{Q^2 - 1}$$

etwas darüber aus, welche Reihen für genaue Stabilitätsmessungen in Frage kommen. Die Größe von r richtet sich nach der Größe der Grundzahl, welche in r im Nenner auftritt. Ist die Grundzahl sehr groß, so wird r sehr klein werden. Ist dann noch Q nahe 1, so ist auch p sehr klein, wir haben annähernd konstante Grundwahrscheinlichkeit. Ist andererseits die Grundzahl klein, dann ist r groß. Ergibt sich dann ein Q, welches die 1 unerheblich übertrifft, so kann immer noch eine wesentliche physische Schwankungskomponente vorhanden sein. Also ist, trotzdem das Kriterium

$$Q = 1$$

annähernd erfüllt wird, doch das Maximum der Stabilität noch nicht sehr nahe erreicht. Das Maximumkriterium ergibt daher

nur genaue Messungen, wenn Reihen von großer Grundzahl untersucht werden. Wir stellen aus diesem Grunde die Beobachtungen für Gesamtpreußen an, wo die Beobachtungszahlen mehrere Hunderttausend betragen.

Aus den letzten Erörterungen folgt auch, daß Q kein eigentliches Maß der Stabilität ist, denn Q variiert ja mit der Grundzahl. Wir dürfen daher statistische Reihen in bezug auf ihre Stabilität nicht mit Hilfe von Q vergleichen. Dazu bietet vielmehr das Maß für die physische Dispersion ein brauchbares Hilfsmittel, wofür wir den Wert

$$p = r\sqrt{Q^2 - 1}$$

gefunden hatten.

Als Anwendung dieser Theorie wollen wir jetzt die Stabilität von Sterbenswahrscheinlichkeiten der ersten Altersjahre untersuchen. Es handelt sich hier um absolute Sterbenswahrscheinlichkeiten, d. h. um die Verhältnisse der Zahl der in einer bestimmten Altersklasse Gestorbenen zu den in diese Altersklasse Eingetretenen. Sterben also a Knaben bzw. Mädchen in einer einjährigen Altersklasse und treten $a + b$ desselben Geschlechtes in diese Altersklasse ein, so ist $\frac{a}{a+b}$ ein empirischer Wert jener absoluten Sterbenswahrscheinlichkeit. Es handelt sich also darum, ob eine größere Reihe derartiger aufeinander folgender Verhältniszahlen das Maximum der Stabilität aufweist oder nicht.

Diese Sterbenswahrscheinlichkeiten kann man nun keineswegs direkt aus den statistischen Veröffentlichungen ablesen, sondern man muß sie berechnen. Dazu wollen wir uns eines geometrischen Hilfsmittels bedienen, welches von Lexis[1]) stammt und den Wert hat, die etwas schwierig darzustellenden Begriffe außerordentlich einfach zu veranschaulichen. Es ist dies eine Koordinatenkonstruktion, die wir hiermit ein für allemal unseren Untersuchungen zugrunde legen wollen.

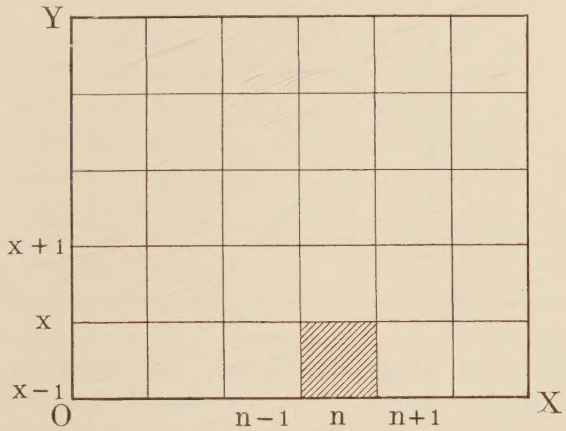
Auf der Abszissenachse OX sind die einjährigen Geburtsstrecken abgetragen, auf der Ordinatenachse OY die einjährigen Altersklassen. Durch diese Teilpunkte ziehen wir Parallele zu den Achsen und erhalten als sogenannte Altersgrenzlinien Parallele zur X-Achse, als Geburtsgrenzlinien Parallele zur Y-Achse. Vom

[1]) Lexis, Einleitung in die Theorie der Bevölkerungsstatistik (1875).

Geburtspunkte auf der Abszissenachse denken wir uns senkrecht zu derselben die Lebenslinien gezogen, die jedesmal mit dem Sterbepunkte enden. Die Sterbepunkte werden sich über das quadrierte Feld verteilen.

Wir verstehen also unter der Sterbenswahrscheinlichkeit der x^{ten} Altersklasse des n^{ten} Geburtsjahres das Verhältnis der Zahl

Fig. 1.



derjenigen, die im Alter von $x-1$ bis x Jahren gestorben sind, zu der Zahl derjenigen, die in das Alter von $x-1$ Jahren — nach und nach — eingetreten sind. Wir wollen dafür symbolisch schreiben

$$\frac{{}_nM_x^1}{{}_nL_{x-1}^1},$$

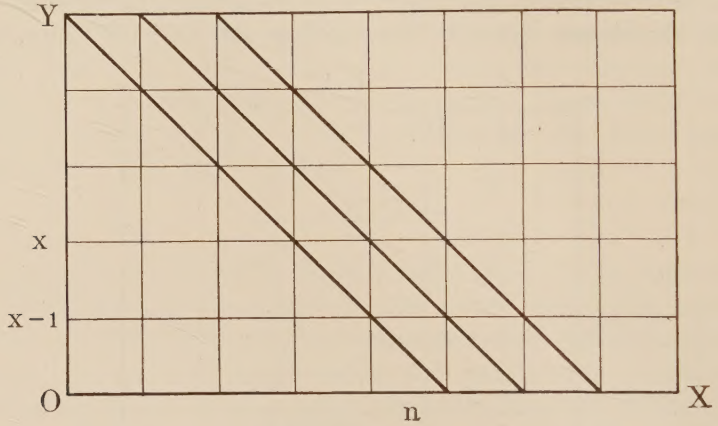
wobei sich immer der rechte untere Index x auf das Lebensalter, der linke n auf das Geburtsjahr bezieht. Der obere Index 1 weist darauf hin, daß wir es mit sogenannten ersten Hauptgesamtheiten von Verstorbenen bzw. Lebenden zu tun haben. Die Fig. 1 gibt uns ein anschauliches Bild von diesen Begriffen. ${}_nM_x^1$ ist der Sterbepunkteinhalt des schraffierten Quadrates, ${}_nL_{x-1}^1$ würde gleich dem Punkteinhalt des ganzen über n sich erhebenden Streifens sein.

Zur Auffindung der ersten Hauptgesamtheiten von Verstorbenen leistet wieder unsere geometrische Konstruktion ihre Dienste, wenn wir in dieselbe nur eine neue Kategorie von Hilfslinien eintragen.

*

Ziehen wir nämlich nach Lexis Gerade durch die Teilpunkte der Abszissenachse unter 45° zu dieser geneigt (Fig. 2), so setzen sich die einzelnen Quadrate aus zwei Dreiecken zusammen,

Fig. 2.



eins unterhalb der Diagonale liegend, das sogenannte untere Elementardreieck — Symbol Δ^1 —, eins oberhalb derselben liegend, das sogenannte obere Elementardreieck — Symbol Δ^2 —. ${}_nM_x^1$ ist also durch die Gleichung gegeben

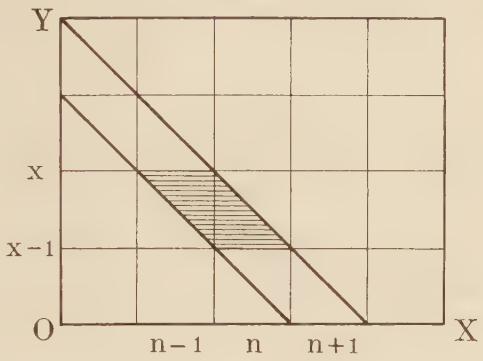
$$ {}_nM_x^1 = {}_n\Delta_x^1 + {}_n\Delta_x^2. $$

Der Sterbepunkteinhalt der Elementardreiecke ist nun immer zu berechnen, wenn die Gestorbenen in den statistischen Quellenwerken nach Geburtsjahren und nach Altersklassen geordnet sind. Das ist leicht an unserer Figur zu zeigen. Die unter 45° zur X-Achse geneigten Gerade sind Zeitgrenzlinien; denn die einzelnen Punkte ein und derselben Linie entsprechen einem bestimmten Zeitpunkt der Abszissenachse, nämlich dem Schnittpunkt, wie man sich durch Niederlegen der Lebenslinien auf die Abszissenachse überzeugen kann. Demnach werden innerhalb eines solchen schrägen Streifens alle Sterbepunkte eines Jahres verzeichnet stehen. Die Altersgrenzlinien teilen diese Jahresstreifen in Parallelogramme, diese Einteilung entspricht der Sonderung der Gestorbenen nach Altersklassen.

In Fig. 3 würden also in dem schraffierten Parallelogramme die im Alter von $x-1$ bis x Jahren im $n+1^{\text{ten}}$ Kalenderjahre

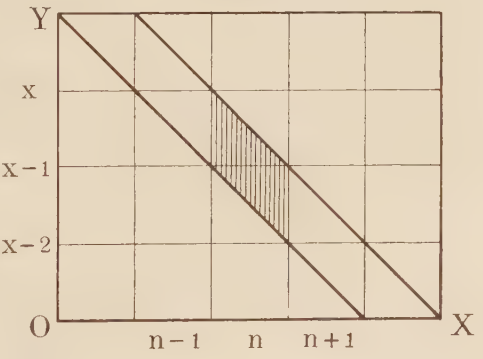
Verstorbenen stehen. Man nennt diese Einteilung von Verstorbenen eine „dritte Hauptgesamtheit“ mit dem Symbol M^3. Endlich teilen auch die Geburtsgrenzlinien die schrägen Streifen in Parallelogramme. Wir hätten damit die Einteilung der Verstorbenen eines Jahres nach Geburtsjahren.

Fig. 3.



In Fig. 4 ist wieder ein solches Parallelogramm kenntlich gemacht, sein Punkteinhalt ist eine zweite Hauptgesamtheit von Verstorbenen — Symbol M^2. Beachten wir nun noch, daß die unterste Klasse der Gestorbenen nach Geburtsjahren geordnet unmittelbar eine Elementargesamtheit bildet, so können wir mit Hilfe dieser drei Bestimmungsstücke, den zweiten und dritten Hauptgesamtheiten von Verstorbenen und den unteren Elementargesamtheiten der ersten Altersklassen, sämtliche Elementargesamtheiten bestimmen. Es ergeben sich nämlich allgemein die unteren Elementargesamtheiten der x^{ten} Altersklasse des n^{ten} Geburtsjahres (Fig. 4) nach der Formel

Fig. 4.



$$ {}_nM_t^2 - {}_n\Delta_{x-1}^2 = {}_n\Delta_x^1, $$

wobei der untere Index t sich immer auf das Sterbejahr bezieht und $t = n + x - 1$ ist, die entsprechenden oberen Elementargesamtheiten (Fig. 3) nach der Formel

$$ {}_tM_x^3 - {}_{n+1}\Delta_x^1 = {}_n\Delta_x^2, $$

wobei $t = n + x$ ist.

Nun noch ein Wort über die Auffindung der ersten Hauptgesamtheiten von Lebenden, die sich in der Formel für die Sterbenswahrscheinlichkeiten im Nenner befinden. Für die Altersklasse von 0 — 1 Jahren ist der Wert von L_0^1 gleich G, gleich der Zahl der in dem betreffenden Jahre Lebendgeborenen. Für die höheren Altersklassen finden wir die L^1 nach dem Schema:

$$L_1^1 = G - M_1^1,$$
$$L_2^1 = G - [M_1^1 + M_2^1],$$

einfach durch Subtraktion der ersten Hauptgesamtheiten der Verstorbenen von der Zahl der Lebendgeborenen.

Das Zahlenmaterial entnehmen wir der preußischen Statistik. Die Quellenwerke[1]) enthalten nämlich die Einteilung der Gestorbenen nach Altersklassen und nach Geburtsjahren, so daß nach den bisherigen Erörterungen der Berechnung der Sterbenswahrscheinlichkeiten nichts mehr im Wege steht. Wir fassen jetzt unsere Aufgabe präzise so, daß wir die Stabilität der Sterbenswahrscheinlichkeiten der ersten sechs Altersjahre in Preußen für die Geburtsjahre 1891 bis 1905 untersuchen wollen.

Wir beginnen mit der Altersklasse von 0 — 1 Jahre und machen die Berechnungen wegen größerer Knabensterblichkeit für beide Geschlechter getrennt.

n	$n\Delta_1^1$		n	$n\Delta_1^1$	
	Knaben	Mädchen		Knaben	Mädchen
1891	91 659	72 985	1902	84 816	66 997
1892	91 919	73 079	1903	94 490	75 442
1893	94 457	76 526	1904	93 690	74 278
1894	85 501	68 615	1905	96 009	76 090
1895	98 454	78 524	1906	90 578	71 240
1896	89 065	71 339	1907	84 374	66 396
1897	95 511	77 019	1908	87 648	69 234
1898	95 056	76 303	1909	81 716	64 787
1899	98 966	79 034	1910	76 822	60 669
1900	104 766	83 788	1911	89 587	71 677
1901	99 827	80 120			

[1]) Preußische Statistik (Amtl. Quellenwerke) Bd. 123, 127, 134, 138, 143, 149, 155, 160, 164, 169, 178, 183, 190, 196, 200, 207, 213, 220, 224, 229, 233.

Hier gibt, wie schon erwähnt, die Einteilung der Gestorbenen nach Geburtsjahren unmittelbar die untere Elementargesamtheit. Wir finden dafür vorstehende Zahlen.

Die oberen Elementargesamtheiten erhält man nach der Formel

$$ {}_tM_1^3 - {}_{n+1}\Delta_1^1 = {}_n\Delta_1^2; \quad t = n + 1. $$

Die Rechnung ergibt für

a) Knaben.

t	n	${}_tM_1^3 - {}_{n+1}\Delta_1^1 = {}_n\Delta_1^2$
1892	1891	129 674 — 91 919 = 37 755
1893	1892	131 407 — 94 457 = 36 950
1894	1893	123 345 — 85 501 = 37 844
1895	1894	136 886 — 98 454 = 38 432
1896	1895	125 350 — 89 065 = 36 285
1897	1896	134 774 — 95 511 = 39 263
1898	1897	129 973 — 95 056 = 34 917
1899	1898	138 215 — 98 966 = 39 249
1900	1899	145 240 — 104 766 = 40 474
1901	1900	138 948 — 99 827 = 39 121
1902	1901	119 869 — 84 816 = 35 053
1903	1902	132 655 — 94 490 = 38 165
1904	1903	129 473 — 93 690 = 35 783
1905	1904	136 234 — 96 009 = 40 225
1906	1905	124 925 — 90 578 = 34 347
1907	1906	117 839 — 84 374 = 33 465
1908	1907	121 712 — 87 648 = 34 064
1909	1908	113 170 — 81 716 = 31 454
1910	1909	106 574 — 76 822 = 29 752
1911	1910	123 170 — 89 587 = 33 583

b) Mädchen.

t	n	${}_tM_1^3 - {}_{n+1}\Delta_1^1 = {}_n\Delta_1^2$
1892	1891	104 078 — 73 079 = 30 999
1893	1892	107 230 — 76 526 = 30 704
1894	1893	100 373 — 68 615 = 31 758
1895	1894	110 252 — 78 524 = 31 728
1896	1895	101 492 — 71 339 = 30 153
1897	1896	109 689 — 77 019 = 32 670
1898	1897	105 556 — 76 303 = 29 253
1899	1898	111 948 — 79 034 = 32 914

t	n	${}_tM_1^3 - {}_{n+1}\Delta_1^1 = {}_n\Delta_1^2$
1900	1899	117 310 — 83 788 = 33 522
1901	1900	112 747 — 80 120 = 32 627
1902	1901	95 792 — 66 997 = 28 795
1903	1902	107 203 — 75 442 = 31 761
1904	1903	104 369 — 74 278 = 30 091
1905	1904	109 747 — 76 090 = 33 657
1906	1905	99 839 — 71 240 = 28 599
1907	1906	94 192 — 66 396 = 27 796
1908	1907	97 266 — 69 234 = 28 032
1909	1908	91 144 — 64 787 = 26 357
1910	1909	85 327 — 60 669 = 24 658
1911	1910	100 059 — 71 677 = 28 382

Aus den Elementargesamtheiten setzen sich die ersten Hauptgesamtheiten von Verstorbenen zusammen nach der Formel:

$$ {}_nM_1^1 = {}_n\Delta_1^1 + {}_n\Delta_1^2. $$

Wir erhalten für

a) Knaben.

n	${}_n\Delta_1^1 + {}_n\Delta_1^2 = {}_nM_1^1$
1891	91 659 + 37 755 = 129 414
1892	91 919 + 36 950 = 128 869
1893	94 457 + 37 844 = 132 301
1894	85 501 + 38 432 = 123 933
1895	98 454 + 36 285 = 134 739
1896	89 065 + 39 263 = 128 328
1897	95 511 + 34 917 = 130 428
1898	95 056 + 39 249 = 134 305
1899	98 966 + 40 474 = 139 440
1900	104 766 + 39 121 = 143 887
1901	99 827 + 35 053 = 134 880
1902	84 816 + 38 165 = 122 981
1903	94 490 + 35 783 = 130 273
1904	93 690 + 40 225 = 133 915
1905	96 009 + 34 347 = 130 356

b) Mädchen.

n	${}_n\Delta_1^1 + {}_n\Delta_1^2 = {}_nM_1^1$
1891	72 985 + 30 999 = 103 984
1892	73 079 + 30 704 = 103 783
1893	76 526 + 31 758 = 108 284

n	${}_n\mathcal{A}_1^1 + {}_n\mathcal{A}_1^2 = {}_nM_1^1$
1894	68 615 + 31 728 = 100 343
1895	78 524 + 30 153 = 108 677
1896	71 339 + 32 670 = 104 009
1897	77 019 + 29 253 = 106 272
1898	76 303 + 32 914 = 109 217
1899	79 034 + 33 522 = 112 556
1900	83 788 + 32 627 = 116 415
1901	80 120 + 28 795 = 108 915
1902	66 997 + 31 761 = 98 758
1903	75 442 + 30 091 = 105 533
1904	74 278 + 33 657 = 107 935
1905	76 090 + 28 599 = 104 689

Dividieren wir jetzt diese ersten Hauptgesamtheiten von Verstorbenen durch die Zahlen der Lebendgeborenen, so erhalten wir die gesuchten Sterbenswahrscheinlichkeiten für die erste Altersklasse. Die Reihen lauten für beide Geschlechter:

Geburtsjahr	Knaben	Mädchen	Geburtsjahr	Knaben	Mädchen
1891	129 414	103 984	1899	139 440	112 556
	584 256	553 907		628 203	597 251
1892	128 869	103 783	1900	143 887	116 415
	568 461	538 042		634 234	601 485
1893	132 301	108 284	1901	134 880	108 915
	593 034	563 216		647 146	613 233
1894	123 933	100 343	1902	122 981	98 758
	586 513	556 531		643 350	612 336
1895	134 739	108 677	1903	130 273	105 533
	598 934	568 993		633 612	601 601
1896	128 328	104 009	1904	133 915	107 935
	607 461	577 823		649 348	615 186
1897	130 428	106 272	1905	130 356	104 689
	612 022	581 838		638 038	603 582
1898	134 305	109 217			
	625 312	594 048			

Wir sehen, daß die Sterbenswahrscheinlichkeiten ganz bestimmte Oszillationen ausführen. Um den Charakter dieser Schwankungen besser zu erkennen, wollen wir die Zahlen der im Alter von 0 — 1 Jahre Gestorbenen auf 1000 Geborene jedes

Geschlechtes in den Jahren 1891 bis 1905 zusammenstellen. Es ergibt sich dafür:

Geburtsjahr	Knaben	Mädchen
1891	222	188
1892	227	193
1893	223	192
1894	211	180
1895	225	191
1896	211	180
1897	213	183
1898	215	184
1899	222	188
1900	227	193
1901	208	177
1902	191	161
1903	206	175
1904	206	175
1905	204	173

Wir beobachten, daß die Oszillationen nicht ohne merkbaren Zusammenhang untereinander sind. Vielmehr lassen sie eine deutlich auftretende Entwickelungstendenz erkennen. Die Kindersterblichkeit hat infolge besserer hygienischer Einrichtungen und Hilfsmittel abgenommen. Wir vermuten daher schon, daß die Stabilität der Reihen nicht maximal sein wird, da die Einzelwerte keine zufälligen Störungen eines typischen Mittelwertes sind.

Zur genauen Untersuchung der Stabilität wollen wir unser bekanntes Kriterium auf diesen Fall anwenden. Wir setzen also in

$$R = \varrho \sqrt{\frac{2\,[\delta^2]}{n-1}}$$

und

$$r = \varrho \sqrt{\frac{2\,v\,(1-v)}{g}}$$

die bezüglichen Werte ein.

v soll ein möglichst genauer Näherungswert der zugrunde liegenden Sterbenswahrscheinlichkeit sein. Als solcher kann das durch 1000 dividierte arithmetische Mittel der Reihe der in der ersten Altersklasse Verstorbenen auf 1000 Lebendgeborene (siehe oben) genommen worden. $[\delta^2]$ läßt sich dann daraus in ein-

facher Weise berechnen. Wir erhalten für diese Größen folgende Werte:

a) Knaben.

n	$1000\,v$	$1000\,\delta$	$1000^2\,\delta^2$
1891	222[1])	+ 8	64
1892	227	+ 13	169
1893	223	+ 9	81
1894	211	— 3	9
1895	225	+ 11	121
1896	211	— 3	9
1897	213	— 1	1
1898	215	+ 1	1
1899	222	+ 8	64
1900	227	+ 13	169
1901	208	— 6	36
1902	191	— 23	529
1903	206	— 8	64
1904	206	— 8	64
1905	204	— 10	100
	$3211 : 15 = 214 = 10^3\,v$		$1481 = 10^6\,[\delta^2]$

b) Mädchen.

n	$1000\,v$	$1000\,\delta$	$1000^2\,\delta^2$
1891	188[1])	+ 6	36
1892	193	+ 11	121
1893	192	+ 10	100
1894	180	— 2	4
1895	191	+ 9	81
1896	180	— 2	4
1897	183	+ 1	1
1898	184	+ 2	4
1899	188	+ 6	36
1900	193	+ 11	121
1901	177	— 5	25
1902	161	— 21	441
1903	175	— 7	49
1904	175	— 7	49
1905	173	— 9	81
	$2733 : 15 = 182 = 10^3\,v$		$1153 = 10^6\,[\delta^2]$

[1]) Die Bruchteile sind hier fortgelassen, oder durch Erhöhung um 1 in Rechnung gesetzt, da sie die Rechnung nicht wesentlich beeinflussen.

Als Grundzahl g nehmen wir das arithmetische Mittel aus dem größten und kleinsten Werte der Beobachtungszahlen — dies genügt für den praktischen Zweck — und erhalten dafür:

a) Knaben.	b) Mädchen.
568 461	538 042
649 348	615 186
$1\,217\,809 : 2 = 608\,905 = g$	$1\,153\,228 : 2 = 576\,614 = g$

Schließlich ist n, die Anzahl der Einzelwerte, in diesem Falle gleich 15. Nach Einsetzung dieser Zahlen sind dann folgende einfachen Ausdrücke zu berechnen:

a) Knaben.

$$1000\,R = 0{,}4769\sqrt{\frac{2.1481}{14}},$$

$$1000\,r = 0{,}4769\sqrt{\frac{2.214.786}{608\,905}},$$

b) Mädchen.

$$1000\,R = 0{,}4769\sqrt{\frac{2.1153}{14}},$$

$$1000\,r = 0{,}4769\sqrt{\frac{2.182.818}{576\,614}},$$

wobei der Faktor 1000, der rechts in den Nenner vor das Wurzelzeichen tritt, nach links geschafft ist.

Die Ausführung der Rechnung ergibt für:

Knaben:	$1000\,R = 6{,}937$	Mädchen:	$1000\,R = 6{,}121$
	$1000\,r = 0{,}3545$		$1000\,r = 0{,}3427$

Unser Stabilitätskriterium nimmt also die Werte an:

a) Knaben.

$$Q = \frac{1000\,R}{1000\,r} = \frac{6{,}937}{0{,}3545} = 19{,}6.$$

b) Mädchen.

$$Q = \frac{1000\,R}{1000\,r} = \frac{6{,}121}{0{,}3427} = 17{,}9.$$

Wir haben den Fall übernormaler Dispersion. Die Stabilität der absoluten Sterbenswahrscheinlichkeiten der Altersklasse von

0 bis 1 Jahre für die Geburtsjahre 1891 bis 1905 erreicht bei beiden Geschlechtern in Preußen bei weitem nicht das dem Werte $Q = 1$ entsprechende Maximum, wie wir es bei der offensichtlichen evolutorischen Tendenz dieser Reihen schon vermutet hatten.

Um uns nun ein Maß der Stabilität zu verschaffen, welches zur Reihenvergleichung gute Dienste leistet, berechnen wir die auf der Veränderung der Grundwahrscheinlichkeit beruhende physische Schwankungskomponente p. Für p hatten wir die Formel

$$p = r\sqrt{Q^2 - 1}.$$

Da in diesem Falle Q sehr groß ist, können wir die 1 unter dem Wurzelzeichen vernachlässigen und $p = R$ annehmen. Folglich hat p für die beiden Geschlechter die Werte:

	Knaben	Mädchen
$1000\,p$	6,94	6,12

Betrachten wir vergleichsweise die Zahlen für Knaben und Mädchen, so sind die Stabilitätsverhältnisse für die Sterbenswahrscheinlichkeiten der Mädchen etwas günstiger als die der Knaben. Tatsächlich wirken die äußeren Ursachen, die die Sterblichkeit beeinflussen, stärker auf das männliche Geschlecht als auf das weibliche, da die Widerstandsfähigkeit der Knaben gegen den Tod im ersten Lebensjahr geringer ist als die der Mädchen. Diese Tatsache werden wir auch bei den nächst höheren Altersklassen bestätigt sehen.

Wir gehen zur Untersuchung der Stabilität der Sterbenswahrscheinlichkeiten für die Altersklasse von 1 bis 2 Jahren über. Zu dem Zwecke berechnen wir zunächst die Sterbenswahrscheinlichkeiten der in den Jahrgängen 1891 bis 1905 Lebendgeborenen in ihrem zweiten Lebensjahre in der bekannten Weise auf Grund der zu untersuchenden ersten Hauptgesamtheiten. Diese setzen sich aus den unteren und oberen Elementargesamtheiten nach der Formel

$${}_nM_2^1 = {}_n\Delta_2^1 + {}_n\Delta_2^2$$

zusammen. Die unteren Elementargesamtheiten erhalten wir nach der Formel

$${}_nM_t^2 - {}_n\Delta_1^2 = {}_n\Delta_2^1; \quad t = n + 1.$$

a) Knaben.

t	n	${}_nM_t^2 - {}_n\Delta_1^2 = {}_n\Delta_2^1$
1892	1891	54 609 — 37 755 = 16 854
1893	1892	53 300 — 36 950 = 16 350
1894	1893	52 716 — 37 844 = 14 872
1895	1894	53 587 — 38 432 = 15 155
1896	1895	50 796 — 36 285 = 14 511
1897	1896	53 644 — 39 263 = 14 381
1898	1897	49 437 — 34 917 = 14 520
1899	1898	54 569 — 39 249 = 15 320
1900	1899	55 398 — 40 474 = 14 924
1901	1900	53 926 — 39 121 = 14 805
1902	1901	48 988 — 35 053 = 13 935
1903	1902	53 485 — 38 165 = 15 320
1904	1903	49 050 — 35 783 = 13 267
1905	1904	54 836 — 40 225 = 14 611
1906	1905	47 639 — 34 347 = 13 292
1907	1906	45 667 — 33 465 = 12 202
1908	1907	46 822 — 34 064 = 12 758
1909	1908	43 631 — 31 454 = 12 177
1910	1909	40 636 — 29 752 = 10 884
1911	1910	45 941 — 33 583 = 12 358

b) Mädchen.

t	n	${}_nM_t^2 - {}_n\Delta_1^2 = {}_n\Delta_2^1$
1892	1891	47 065 — 30 999 = 16 066
1893	1892	46 030 — 30 704 = 15 326
1894	1893	45 834 — 31 758 = 14 076
1895	1894	45 796 — 31 728 = 14 068
1896	1895	44 085 — 30 153 = 13 932
1897	1896	46 809 — 32 670 = 14 139
1898	1897	43 300 — 29 253 = 14 047
1899	1898	47 613 — 32 914 = 14 699
1900	1899	47 711 — 33 522 = 14 189
1901	1900	46 496 — 32 627 = 13 869
1902	1901	42 096 — 28 795 = 13 301
1903	1902	46 182 — 31 761 = 14 421
1904	1903	43 071 — 30 091 = 12 980
1905	1904	47 687 — 33 657 = 14 030
1906	1905	41 178 — 28 599 = 12 579
1907	1906	39 294 — 27 796 = 11 498

t	n	${}_nM_t^2 - {}_n\Delta_1^2 = {}_n\Delta_2^1$
1908	1907	40 311 — 28 032 = 12 279
1909	1908	38 004 — 26 357 = 11 647
1910	1909	35 003 — 24 658 = 10 345
1911	1910	40 047 — 28 382 = 11 665

Die Berechnung der oberen Elementargesamtheiten geschieht hier nach der Formel

$$ {}_tM_2^3 - {}_{n+1}\Delta_2^1 = {}_n\Delta_2^2; \quad t = n + 2, $$

und lautet:

a) Knaben.

t	n	${}_tM_2^3 - {}_{n+1}\Delta_2^1 = {}_n\Delta_2^2$
1893	1891	27 256 — 16 350 = 10 906
1894	1892	25 649 — 14 872 = 10 777
1895	1893	25 203 — 15 155 = 10 048
1896	1894	24 338 — 14 511 = 9 827
1897	1895	23 950 — 14 381 = 9 569
1898	1896	23 504 — 14 520 = 8 984
1899	1897	25 023 — 15 320 = 9 703
1900	1898	24 800 — 14 924 = 9 876
1901	1899	24 611 — 14 805 = 9 806
1902	1900	22 631 — 13 935 = 8 696
1903	1901	25 264 — 15 320 = 9 944
1904	1902	22 324 — 13 267 = 9 057
1905	1903	23 655 — 14 611 = 9 044
1906	1904	21 606 — 13 292 = 8 314
1907	1905	19 850 — 12 202 = 7 648
1908	1906	20 896 — 12 758 = 8 138
1909	1907	19 969 — 12 177 = 7 792
1910	1908	17 850 — 10 884 = 6 966
1911	1909	19 343 — 12 358 = 6 985

b) Mädchen.

t	n	${}_tM_2^3 - {}_{n+1}\Delta_2^1 = {}_n\Delta_2^2$
1893	1891	25 554 — 15 326 = 10 228
1894	1892	24 046 — 14 076 = 9 970
1895	1893	23 345 — 14 068 = 9 277
1896	1894	23 131 — 13 932 = 9 199
1897	1895	23 040 — 14 139 = 8 901

t	n	${}_tM_2^3 - {}_{n+1}A_2^1 = {}_nA_2^2$
1898	1896	22 449 — 14 047 = 8 402
1899	1897	23 917 — 14 699 = 9 218
1900	1898	23 441 — 14 189 = 9 252
1901	1899	23 180 — 13 869 = 9 311
1902	1900	21 348 — 13 301 = 8 047
1903	1901	23 670 — 14 421 = 9 249
1904	1902	21 585 — 12 980 = 8 605
1905	1903	22 307 — 14 030 = 8 277
1906	1904	20 367 — 12 579 = 7 788
1907	1905	18 378 — 11 498 = 6 880
1908	1906	19 785 — 12 279 = 7 506
1909	1907	18 689 — 11 647 = 7 042
1910	1908	16 959 — 10 345 = 6 614
1911	1909	18 207 — 11 665 = 6 542

Durch Zusammensetzung der entsprechenden Elementargesamtheiten erhalten wir die ersten Hauptgesamtheiten in folgender Weise.

a) Knaben.

n	${}_nA_2^1 + {}_nA_2^2 = {}_nM_2^1$
1891	16 854 + 10 906 = 27 760
1892	16 350 + 10 777 = 27 127
1893	14 872 + 10 048 = 24 920
1894	15 155 + 9 827 = 24 982
1895	14 511 + 9 569 = 24 080
1896	14 381 + 8 984 = 23 365
1897	14 520 + 9 703 = 24 223
1898	15 320 + 9 876 = 25 196
1899	14 924 + 9 806 = 24 730
1900	14 805 + 8 696 = 23 501
1901	13 935 + 9 944 = 23 879
1902	15 320 + 9 057 = 24 377
1903	13 267 + 9 044 = 22 311
1904	14 611 + 8 314 = 22 925
1905	13 292 + 7 648 = 20 940

b) Mädchen.

n	${}_n\Delta_2^1 + {}_n\Delta_2^2 = {}_nM_2^1$
1891	16 066 + 10 228 = 26 294
1892	15 326 + 9 970 = 25 296
1893	14 076 + 9 277 = 23 353
1894	14 068 + 9 199 = 23 267
1895	13 932 + 8 901 = 22 833
1896	14 139 + 8 402 = 22 541
1897	14 047 + 9 218 = 23 265
1898	14 699 + 9 252 = 23 951
1899	14 189 + 9 311 = 23 500
1900	13 869 + 8 047 = 21 916
1901	13 301 + 9 249 = 22 550
1902	14 421 + 8 605 = 23 026
1903	12 980 + 8 277 = 21 257
1904	14 030 + 7 788 = 21 818
1905	12 579 + 6 880 = 19 459

Endlich haben wir zur Feststellung der Sterbenswahrscheinlichkeiten für diese Altersklasse noch die Überlebenden von einem Jahre zu berechnen. Wir führen das nach dem Schema

$$ {}_nL_1^1 = {}_nG - {}_nM_1^1 $$

aus.

a) Knaben.

n	${}_nG - {}_nM_1^1 = {}_nL_1^1$
1891	584 256 — 129 414 = 454 842
1892	568 461 — 128 869 = 439 592
1893	593 034 — 132 301 = 460 733
1894	586 513 — 123 933 = 462 580
1895	598 934 — 134 739 = 464 195
1896	607 461 — 128 328 = 479 133
1897	612 022 — 130 428 = 481 594
1898	625 312 — 134 305 = 491 007
1899	628 203 — 139 440 = 488 763
1900	634 234 — 143 887 = 490 347
1901	647 146 — 134 880 = 512 266
1902	643 350 — 122 981 = 520 369
1903	633 612 — 130 273 = 503 339
1904	649 348 — 133 915 = 515 433
1905	638 038 — 130 356 = 507 682

b) Mädchen.

n	${}_nG - {}_nM_1^1 = {}_nL_1^1$
1891	553 907 — 103 984 = 449 923
1892	538 042 — 103 783 = 434 259
1893	563 216 — 108 284 = 454 932
1894	556 531 — 100 343 = 456 188
1895	568 993 — 108 677 = 460 316
1896	577 823 — 104 009 = 473 814
1897	581 838 — 106 272 = 475 566
1898	594 048 — 109 217 = 484 831
1899	597 251 — 112 556 = 484 695
1900	601 485 — 116 415 = 485 070
1901	613 233 — 108 915 = 504 318
1902	612 336 — 98 758 = 513 578
1903	601 601 — 105 533 = 496 068
1904	615 186 — 107 935 = 507 251
1905	603 582 — 104 689 = 498 893

Dividieren wir jetzt die ersten Hauptgesamtheiten durch die Zahlen der Überlebenden von einem Jahre, so erhalten wir die Sterbenswahrscheinlichkeiten. Die Reihen lauten für beide Geschlechter:

n	Knaben	Mädchen	n	Knaben	Mädchen
1891	$\frac{27\,760}{454\,842}$	$\frac{26\,294}{449\,923}$	1899	$\frac{24\,730}{488\,763}$	$\frac{23\,500}{484\,695}$
1892	$\frac{27\,127}{439\,592}$	$\frac{25\,296}{434\,259}$	1900	$\frac{23\,501}{490\,347}$	$\frac{21\,916}{485\,070}$
1893	$\frac{24\,920}{460\,733}$	$\frac{23\,353}{454\,932}$	1901	$\frac{23\,879}{512\,266}$	$\frac{22\,550}{504\,318}$
1894	$\frac{24\,982}{462\,580}$	$\frac{23\,267}{456\,188}$	1902	$\frac{24\,377}{520\,369}$	$\frac{23\,026}{513\,578}$
1895	$\frac{24\,080}{464\,195}$	$\frac{22\,833}{460\,316}$	1903	$\frac{22\,311}{503\,339}$	$\frac{21\,257}{496\,068}$
1896	$\frac{23\,365}{479\,133}$	$\frac{22\,541}{473\,814}$	1904	$\frac{22\,925}{515\,433}$	$\frac{21\,818}{507\,251}$
1897	$\frac{24\,223}{481\,594}$	$\frac{23\,265}{475\,566}$	1905	$\frac{20\,940}{507\,682}$	$\frac{19\,459}{498\,893}$
1898	$\frac{25\,196}{491\,007}$	$\frac{23\,951}{484\,831}$			

Wir erkennen ohne weiteres, daß die Reihen Schwankungen aufweisen. Es fragt sich wieder, ob diese Schwankungen sich in den Grenzen halten, wie bei einem korrekten Zufallsspiele mit konstanten Chancen oder nicht. Zur Entscheidung ziehen wir unser Kriterium heran.

Wir setzen also in die Formeln

$$R = \varrho\sqrt{\frac{2[\delta^2]}{n-1}},$$

$$r = \varrho\sqrt{\frac{2v(1-v)}{g}}$$

die sich in unserem Falle ergebenden Werte ein. Zur Berechnung von v suchen wir die Reihen der Verstorbenen dieser Altersklasse auf 1000 in sie Eingetretene. Für v nehmen wir wieder das arithmetische Mittel dieser Zahlen durch 1000 dividiert. $[\delta^2]$ ergibt sich daraus in bekannter Weise.

Wir erhalten:

a) Knaben.

n	$1000\,v$	$1000\,\delta$	$1000^2\,\delta^2$
1891	61	+ 11	121
1892	62	+ 12	144
1893	54	+ 4	16
1894	54	+ 4	16
1895	52	+ 2	4
1896	49	— 1	1
1897	50	± 0	0
1898	51	+ 1	1
1899	51	+ 1	1
1900	48	— 2	4
1901	47	— 3	9
1902	47	— 3	9
1903	44	— 6	36
1904	44	— 6	36
1905	41	— 9	81
	$755 : 15 = 50 = 10^3\,v$		$479 = 10^6\,[\delta^2]$

*

b) Mädchen.

n	$1000\,v$	$1000\,\delta$	$1000^2\,\delta^2$
1891	58	+ 10	100
1892	58	+ 10	100
1893	51	+ 3	9
1894	51	+ 3	9
1895	50	+ 2	4
1896	48	± 0	0
1897	49	+ 1	1
1898	49	+ 1	1
1899	48	± 0	0
1900	45	− 3	9
1901	45	− 3	9
1902	45	− 3	9
1903	43	− 5	25
1904	43	− 5	25
1905	39	− 9	81
	$722 : 15 = 48 = 10^3\,v$		$382 = 10^6\,[\delta^2]$

Für g erhalten wir in der bekannten Weise:

a) Knaben.

439 592
520 369
959 961 : 2 = 479 981 = g,

b) Mädchen.

434 259
513 578
947 837 : 2 = 473 919 = g.

Wir können jetzt die in Frage stehenden Ausdrücke berechnen, welche lauten:

a) Knaben.

$$1000\,R = 0{,}4769\,\sqrt{\frac{2.479}{14}} = 3{,}945;$$

$$1000\,r = 0{,}4769\,\sqrt{\frac{2.50.950}{479\,981}} = 0{,}2122.$$

b) Mädchen.

$$1000\,R = 0{,}4769\,\sqrt{\frac{2.382}{14}} = 3{,}523;$$

$$1000\,r = 0{,}4769\,\sqrt{\frac{2.48.952}{473\,919}} = 0{,}2094.$$

Unser Stabilitätskriterium nimmt also folgende Werte an:

a) Knaben.

$$Q = \frac{1000\,R}{1000\,r} = \frac{3{,}945}{0{,}2122} = 18{,}6;$$

b) Mädchen.

$$Q = \frac{1000\,R}{1000\,r} = \frac{3{,}523}{0{,}2094} = 16{,}8.$$

Auch für die Altersklasse von 1 bis 2 Jahren ist das Maximum der Stabilität — für $Q = 1$ — bei weitem nicht erreicht; wir haben stark übernormale Dispersion. Diese wird gemessen durch die physische Schwankungskomponente

$$p = r\sqrt{Q^2 - 1},$$

für die wir auch hier wieder

$$p = R$$

setzen können. Die Werte wollen wir vergleichsweise denen für die erste Altersklasse gegenüber stellen und erhalten:

Alter	$1000\,p$	
	Knaben	Mädchen
0—1 Jahr	6,94	6,12
1—2 „	3,95	3,52

Die physische Dispersion der zweiten Altersklasse ist fast auf die Hälfte der ersten gesunken. Die Reihen werden demnach mit dem Lebensalter der Kinder bedeutend stabiler. Als Grund hierfür können wir günstigere Sterbensverhältnisse für die zweite Altersklasse annehmen; denn es ist klar, daß hier die Zahlenreihen im Laufe der Jahre weniger starke Schwankungen aufweisen, da die verschiedenen Todesursachen nicht so verheerend wirken wie im ersten Lebensjahre. Aber noch wird das männliche Geschlecht schwerer heimgesucht, daher etwas größere Stabilität beim weiblichen Geschlecht.

Zur weiteren Beobachtung dieser Ergebnisse untersuchen wir die Stabilität der Sterbenswahrscheinlichkeiten für die nächst höheren Altersklassen und verfolgen zunächst die Geborenen von 1891 bis 1905 während ihres dritten Lebensjahres in bezug auf die Sterbensverhältnisse.

Die unteren Elementargesamtheiten berechnen sich hier nach der Formel

$$ {}_nM_t^2 - {}_n\Delta_2^2 = {}_n\Delta_3^1; \quad t = n + 2. $$

a) Knaben.

t	n	${}_nM_t^2 - {}_n\Delta_2^2 = {}_n\Delta_3^1$
1893	1891	18 606 — 10 906 = 7 700
1894	1892	16 419 — 10 777 = 5 642
1895	1893	15 343 — 10 048 = 5 295
1896	1894	15 259 — 9 827 = 5 432
1897	1895	14 271 — 9 569 = 4 702
1898	1896	14 009 — 8 984 = 5 025
1899	1897	14 927 — 9 703 = 5 224
1900	1898	14 785 — 9 876 = 4 909
1901	1899	14 996 — 9 806 = 5 190
1902	1900	13 350 — 8 696 = 4 654
1903	1901	14 818 — 9 944 = 4 874
1904	1902	13 578 — 9 057 = 4 521
1905	1903	13 341 — 9 044 = 4 297
1906	1904	12 427 — 8 314 = 4 113
1907	1905	11 460 — 7 648 = 3 812
1908	1906	12 200 — 8 138 = 4 062
1909	1907	11 609 — 7 792 = 3 817
1910	1908	10 585 — 6 966 = 3 619
1911	1909	10 785 — 6 985 = 3 800

b) Mädchen.

t	n	${}_nM_t^2 - {}_n\Delta_2^2 = {}_n\Delta_3^1$
1893	1891	17 388 — 10 228 = 7160
1894	1892	15 440 — 9 970 = 5470
1895	1893	14 377 — 9 277 = 5100
1896	1894	14 358 — 9 199 = 5159
1897	1895	13 513 — 8 901 = 4612
1898	1896	13 273 — 8 402 = 4871
1899	1897	14 070 — 9 218 = 4852
1900	1898	13 952 — 9 252 = 4700
1901	1899	14 229 — 9 311 = 4918
1902	1900	12 664 — 8 047 = 4617
1903	1901	14 092 — 9 249 = 4843
1904	1902	13 111 — 8 605 = 4506
1905	1903	12 411 — 8 277 = 4134

t	n	${}_nM_t^2 - {}_n\Delta_2^2 = {}_n\Delta_3^1$
1906	1904	11 790 — 7 788 = 4002
1907	1905	10 528 — 6 880 = 3648
1908	1906	11 386 — 7 506 = 3880
1909	1907	10 730 — 7 042 = 3688
1910	1908	9 959 — 6 614 = 3345
1911	1909	9 993 — 6 542 = 3451

Die oberen Elementargesamtheiten erhält man nach der Formel:

$$ {}_tM_3^3 - {}_{n+1}\Delta_3^1 = {}_n\Delta_3^2; $$
$$ t = n + 3. $$

a) Knaben.

t	n	${}_tM_3^3 - {}_{n+1}\Delta_3^1 = {}_n\Delta_3^2$
1894	1891	11 553 — 5642 = 5911
1895	1892	9 370 — 5295 = 4075
1896	1893	9 981 — 5432 = 4549
1897	1894	8 791 — 4702 = 4089
1898	1895	8 981 — 5025 = 3956
1899	1896	9 649 — 5224 = 4425
1900	1897	9 038 — 4909 = 4129
1901	1898	9 530 — 5190 = 4340
1902	1899	8 687 — 4654 = 4033
1903	1900	8 799 — 4874 = 3925
1904	1901	8 398 — 4521 = 3877
1905	1902	8 184 — 4297 = 3887
1906	1903	7 462 — 4113 = 3349
1907	1904	6 996 — 3812 = 3184
1908	1905	7 290 — 4062 = 3228
1909	1906	7 016 — 3817 = 3199
1910	1907	6 601 — 3619 = 2982
1911	1908	6 783 — 3800 = 2983

b) Mädchen.

t	n	${}_tM_3^3 - {}_{n+1}\Delta_3^1 = {}_n\Delta_3^2$
1894	1891	10 933 — 5470 = 5463
1895	1892	9 023 — 5100 = 3923
1896	1893	9 459 — 5159 = 4300
1897	1894	8 548 — 4612 = 3936
1898	1895	8 545 — 4871 = 3674
1899	1896	9 175 — 4852 = 4323
1900	1897	8 651 — 4700 = 3951
1901	1898	9 179 — 4918 = 4261
1902	1899	8 550 — 4617 = 3933
1903	1900	8 626 — 4843 = 3783
1904	1901	8 190 — 4506 = 3684
1905	1902	7 905 — 4134 = 3771
1906	1903	7 218 — 4002 = 3216
1907	1904	6 699 — 3648 = 3051
1908	1905	6 905 — 3880 = 3025
1909	1906	6 805 — 3688 = 3117
1910	1907	6 112 — 3345 = 2767
1911	1908	6 223 — 3451 = 2772

Durch Zusammensetzung der entsprechenden Elementargesamtheiten erhalten wir die ersten Hauptgesamtheiten in folgender Weise:

a) Knaben.

n	${}_n\Delta_3^1 + {}_n\Delta_3^2 = {}_nM_3^1$
1891	7700 + 5911 = 13 611
1892	5642 + 4075 = 9 717
1893	5295 + 4549 = 9 804
1894	5432 + 4089 = 9 521
1895	4702 + 3956 = 8 658
1896	5025 + 4425 = 9 450
1897	5224 + 4129 = 9 353
1898	4909 + 4340 = 9 249
1899	5190 + 4033 = 9 223
1900	4654 + 3925 = 8 579
1901	4874 + 3877 = 8 751
1902	4521 + 3887 = 8 408
1903	4297 + 3349 = 7 646
1904	4113 + 3184 = 7 297
1905	3812 + 3228 = 7 040

b) Mädchen.

n	${}_nA_3^1 + {}_nA_3^2 = {}_nM_3^1$
1891	7160 + 5463 = 12 623
1892	5470 + 3923 = 9 393
1893	5100 + 4300 = 9 400
1894	5159 + 3936 = 9 095
1895	4612 + 3674 = 8 286
1896	4871 + 4323 = 9 194
1897	4852 + 3951 = 8 803
1898	4700 + 4261 = 8 961
1899	4918 + 3933 = 8 851
1900	4617 + 3783 = 8 400
1901	4843 + 3684 = 8 527
1902	4506 + 3771 = 8 277
1903	4134 + 3216 = 7 350
1904	4002 + 3051 = 7 053
1905	3648 + 3025 = 6 673

Zur Aufstellung der Sterbenswahrscheinlichkeiten hätten wir noch die Überlebenden von 2 Jahren zu berechnen. Wir erhalten:

a) Knaben.

n	${}_nG - {}_nM_1^1 - {}_nM_2^1 = {}_nL_2^1$
1891	454 842 — 27 760 = 427 082
1892	439 592 — 27 127 = 412 465
1893	460 733 — 24 920 = 435 813
1894	462 580 — 24 982 = 437 598
1895	464 195 — 24 080 = 440 115
1896	479 133 — 23 365 = 455 768
1897	481 594 — 24 223 = 457 371
1898	491 007 — 25 196 = 465 811
1899	488 763 — 24 730 = 464 033
1900	490 347 — 23 501 = 466 846
1901	512 266 — 23 879 = 488 387
1902	520 369 — 24 377 = 495 992
1903	503 339 — 22 311 = 481 028
1904	515 433 — 22 925 = 492 508
1905	507 682 — 20 940 = 486 742

b) Mädchen.

n	${}_nG - {}_nM_1^1 - {}_nM_2^1 = {}_nL_2^1$
1891	449 923 — 26 294 = 423 629
1892	434 259 — 25 296 = 408 963
1893	454 932 — 23 353 = 431 579
1894	456 188 — 23 267 = 432 921
1895	460 316 — 22 833 = 437 483
1896	473 814 — 22 541 = 451 273
1897	475 566 — 23 265 = 452 301
1898	484 831 — 23 951 = 460 880
1899	484 695 — 23 500 = 461 195
1900	485 070 — 21 916 = 463 154
1901	504 318 — 22 550 = 481 768
1902	513 578 — 23 026 = 490 552
1903	496 068 — 21 257 = 474 811
1904	507 251 — 21 818 = 485 433
1905	498 893 — 19 459 = 479 434

Die Reihen der Sterbenswahrscheinlichkeiten für die Altersklasse von 2 bis 3 Jahren für die Geburtsjahre 1891 bis 1905 lauten also:

n	Knaben	Mädchen	n	Knaben	Mädchen
1891	13 611 427 082	12 623 423 629	1899	9223 464 033	8851 461 195
1892	9717 412 465	9393 408 963	1900	8579 466 846	8400 463 154
1893	9804 435 813	9400 431 579	1901	8751 488 387	8527 481 768
1894	9521 437 598	9095 432 921	1902	8408 495 992	8277 490 552
1895	8658 440 115	8286 437 483	1903	7646 481 028	7350 474 811
1896	9450 455 768	9194 451 273	1904	7297 492 508	7053 485 433
1897	9353 457 371	8803 452 301	1905	7040 486 742	6673 479 434
1898	9249 465 811	8961 460 880			

Wir untersuchen wieder in der bekannten Weise die Stabilität dieser Reihen. Zu dem Zwecke bestimmen wir zunächst die Werte von v, $[\delta^2]$, wie das bei den früheren Altersklassen geschehen war.

a) Knaben.

n	$1000\,v$	$1000\,\delta$	$1000^2\,\delta^2$
1891	32	+ 12	144
1892	24	+ 4	16
1893	22	+ 2	4
1894	22	+ 2	4
1895	20	± 0	0
1896	21	+ 1	1
1897	20	± 0	0
1898	20	± 0	0
1899	20	± 0	0
1900	18	— 2	4
1901	18	— 2	4
1902	17	— 3	9
1903	16	— 4	16
1904	15	— 5	25
1905	14	— 6	36
	$299 : 15 = 20 = 10^3\,v$		$263 = 10^6\,[\delta^2]$

b) Mädchen.

n	$1000\,v$	$1000\,\delta$	$1000^2\,\delta^2$
1891	30	+ 11	121
1892	23	+ 4	16
1893	22	+ 3	9
1894	21	+ 2	4
1895	19	± 0	0
1896	20	+ 1	1
1897	19	± 0	0
1898	19	± 0	0
1899	19	± 0	0
1900	18	— 1	1
1901	18	— 1	1
1902	17	— 2	4
1903	15	— 4	16
1904	15	— 4	16
1905	14	— 5	25
	$289 : 15 = 19 = 10^3\,v$		$214 = 10^6\,[\delta^2]$

Berechnung von g:

a) Knaben.

412 465
495 992
908 457 : 2 = 454 229 = g

b) Mädchen.

408 963
490 552
899 515 : 2 = 449 758 = g

*

Setzen wir diese Werte in die Formeln für R und r ein, so erhalten wir:

a) Knaben.

$$1000\,R = 0{,}4769\sqrt{\frac{2.263}{14}} = 2{,}923;$$

$$1000\,r = 0{,}4769\sqrt{\frac{2.20.980}{454\,229}} = 0{,}1401.$$

b) Mädchen.

$$1000\,R = 0{,}4769\sqrt{\frac{2.214}{14}} = 2{,}637;$$

$$1000\,r = 0{,}4769\sqrt{\frac{2.19.981}{449\,758}} = 0{,}1373.$$

Das Kriterium der Stabilität nimmt dann die Werte an:

a) Knaben.

$$Q = \frac{1000\,R}{1000\,r} = \frac{2{,}923}{0{,}1401} = 20{,}9.$$

b) Mädchen.

$$Q = \frac{1000\,R}{1000\,r} = \frac{2{,}637}{0{,}1373} = 19{,}2.$$

Wir haben wieder den Fall übernormaler Dispersion. Das Maximum der Stabilität ist auch für die Sterbenswahrscheinlichkeiten der dritten Altersklasse bei weitem nicht erreicht. Man möchte hier bei Betrachtung der größeren Werte für Q vermuten, daß die Reihe der Sterbenswahrscheinlichkeiten für die dritte Altersklasse weniger stabil ist als für die beiden ersten Altersklassen. Darüber läßt sich aber nur mit Hilfe des Wertes der physischen Schwankungskomponente entscheiden, die wir jetzt mit denen der ersten Altersklassen vergleichen wollen.

Alter	$1000\,p = 1000\,R$	
	Knaben	Mädchen
0—1 Jahr	6,94	6,12
1—2 „	3,95	3,52
2—3 „	2,92	2,64

Die Reihen der Sterbenswahrscheinlichkeiten werden demnach mit dem Alter stabiler. Die dritte Altersklasse nimmt keine Ausnahmestellung ein. Dies ist wieder ein Beweis dafür, daß die Werte Q keineswegs ein eigentliches Maß für die Stabilität oder Dispersion sind, andererseits erkennen wir hier aber, wie fein das Kriterium bei großen Grundzahlen auf eine einzige erhebliche Abweichung, die außerordentlich hohe Sterbeziffer der im Jahre 1891 Geborenen reagiert, so daß es dem Werte nach die Q der beiden ersten Altersklassen übertrifft. Endlich bestehen auch hier für das weibliche Geschlecht noch etwas günstigere Stabilitätsverhältnisse.

Wie gestalten sich nun die Sterbenswahrscheinlichkeiten für die Altersklasse von 3 bis 4 Jahren der Überlebenden aus den Geburtsjahren von 1891 bis 1905?

Die unteren Elementargesamtheiten finden sich hier nach der Formel:

$$ {}_nM_t^2 - {}_n\Delta_3^2 = {}_n\Delta_4^1; \quad t = n + 3. $$

a) Knaben.

t	n	${}_nM_t^2 - {}_n\Delta_3^2 = {}_n\Delta_4^1$
1894	1891	9815 — 5911 = 3904
1895	1892	7107 — 4075 = 3032
1896	1893	7776 — 4549 = 3227
1897	1894	6797 — 4089 = 2708
1898	1895	6946 — 3956 = 2990
1899	1896	7546 — 4425 = 3121
1900	1897	7086 — 4129 = 2957
1901	1898	7411 — 4340 = 3071
1902	1899	6850 — 4033 = 2817
1903	1900	6764 — 3925 = 2839
1904	1901	6631 — 3877 = 2754
1905	1902	6496 — 3887 = 2609
1906	1903	5783 — 3349 = 2434
1907	1904	5497 — 3184 = 2313
1908	1905	5484 — 3228 = 2256
1909	1906	5555 — 3199 = 2356
1910	1907	5150 — 2982 = 2168
1911	1908	5231 — 2983 = 2248

b) Mädchen.

t	n	${}_nM_t^2 - {}_n\Delta_3^2 = {}_n\Delta_4^1$
1894	1891	9237 — 5463 = 3774
1895	1892	6860 — 3923 = 2937
1896	1893	7317 — 4300 = 3017
1897	1894	6694 — 3936 = 2758
1898	1895	6447 — 3674 = 2773
1899	1896	7339 — 4323 = 3016
1900	1897	6734 — 3951 = 2783
1901	1898	7273 — 4261 = 3012
1902	1899	6708 — 3933 = 2775
1903	1900	6560 — 3783 = 2777
1904	1901	6483 — 3684 = 2799
1905	1902	6347 — 3771 = 2576
1906	1903	5608 — 3216 = 2392
1907	1904	5232 — 3051 = 2181
1908	1905	5202 — 3025 = 2177
1909	1906	5271 — 3117 = 2154
1910	1907	4847 — 2767 = 2080
1911	1908	4953 — 2772 = 2181

Die oberen Elementargesamtheiten erhalten wir durch

$${}_tM_4^3 - {}_{n+1}\Delta_4^1 = {}_n\Delta_4^2; \quad t = n + 4$$

folgendermaßen:

a) Knaben.

t	n	${}_tM_4^3 - {}_{n+1}\Delta_4^1 = {}_n\Delta_4^2$
1895	1891	5921 — 3032 = 2889
1896	1892	5907 — 3227 = 2680
1897	1893	5179 — 2708 = 2471
1898	1894	5489 — 2990 = 2499
1899	1895	6012 — 3121 = 2891
1900	1896	5683 — 2957 = 2726
1901	1897	5850 — 3071 = 2779
1902	1898	5324 — 2817 = 2507
1903	1899	5469 — 2839 = 2630
1904	1900	5079 — 2754 = 2325
1905	1901	5133 — 2609 = 2524
1906	1902	4702 — 2434 = 2268
1907	1903	4368 — 2313 = 2055
1908	1904	4368 — 2256 = 2112
1909	1905	4544 — 2356 = 2188
1910	1906	4128 — 2168 = 1960
1911	1907	4147 — 2248 = 1899

b) Mädchen.

t	n	${}_tM_4^3 - {}_{n+1}A_4^1 = {}_nA_4^2$
1895	1891	5617 — 2937 = 2680
1896	1892	5632 — 3017 = 2615
1897	1893	5298 — 2758 = 2540
1898	1894	5261 — 2773 = 2488
1899	1895	5656 — 3016 = 2640
1900	1896	5427 — 2783 = 2644
1901	1897	5680 — 3012 = 2668
1902	1898	5222 — 2775 = 2447
1903	1899	5265 — 2777 = 2488
1904	1900	5049 — 2799 = 2250
1905	1901	5012 — 2576 = 2436
1906	1902	4615 — 2392 = 2223
1907	1903	4145 — 2181 = 1964
1908	1904	4255 — 2177 = 2078
1909	1905	4175 — 2154 = 2021
1910	1906	3854 — 2080 = 1774
1911	1907	3946 — 2181 = 1765

Durch Zusammensetzung beider Elementargesamtheiten desselben Geburtsjahres erhalten wir die ersten Hauptgesamtheiten der Verstorbenen.

a) Knaben.

n	${}_nA_4^1 + {}_nA_4^2 = {}_nM_4^1$
1891	3904 + 2889 = 6793
1892	3032 + 2680 = 5712
1893	3227 + 2471 = 5698
1894	2708 + 2499 = 5207
1895	2990 + 2891 = 5881
1896	3121 + 2726 = 5847
1897	2957 + 2779 = 5736
1898	3071 + 2507 = 5578
1899	2817 + 2630 = 5447
1900	2839 + 2325 = 5164
1901	2754 + 2524 = 5278
1902	2609 + 2268 = 4877
1903	2434 + 2055 = 4489
1904	2313 + 2112 = 4425
1905	2256 + 2188 = 4444

b) Mädchen.

n	${}_nA_4^1 + {}_nA_4^2 = {}_nM_4^1$
1891	3774 + 2680 = 6454
1892	2937 + 2615 = 5552
1893	3017 + 2540 = 5557
1894	2758 + 2488 = 5246
1895	2773 + 2640 = 5413
1896	3016 + 2644 = 5660
1897	2783 + 2668 = 5451
1898	3012 + 2447 = 5459
1899	2775 + 2488 = 5263
1900	2777 + 2250 = 5027
1901	2799 + 2436 = 5235
1902	2576 + 2223 = 4799
1903	2392 + 1964 = 4356
1904	2181 + 2078 = 4259
1905	2177 + 2021 = 4198

Endlich haben wir noch zur Berechnung der Sterbenswahrscheinlichkeiten die Überlebenden von 3 Jahren zu suchen.

a) Knaben.

n	${}_nL_2^1 - {}_nM_3^1 = {}_nL_3^1$
1891	427 082 — 13 611 = 413 471
1892	412 465 — 9 717 = 402 748
1893	435 813 — 9 804 = 426 009
1894	437 598 — 9 521 = 428 077
1895	440 115 — 8 658 = 431 457
1896	455 768 — 9 450 = 446 318
1897	457 371 — 9 353 = 448 018
1898	465 811 — 9 249 = 456 562
1899	464 033 — 9 223 = 454 810
1900	466 846 — 8 579 = 458 267
1901	488 387 — 8 751 = 479 636
1902	495 992 — 8 408 = 487 584
1903	481 028 — 7 646 = 473 382
1904	492 508 — 7 297 = 485 211
1905	486 742 — 7 040 = 479 702

b) Mädchen.

n	${}_nL_2^1 - {}_nM_3^1 = {}_nL_3^1$
1891	423 629 — 12 623 = 411 006
1892	408 963 — 9 393 = 399 570
1893	431 579 — 9 400 = 422 179
1894	432 921 — 9 095 = 423 826
1895	437 483 — 8 286 = 429 197
1896	451 273 — 9 194 = 442 079
1897	452 301 — 8 803 = 443 498
1898	460 880 — 8 961 = 451 919
1899	461 195 — 8 851 = 452 344
1900	463 154 — 8 400 = 454 754
1901	481 768 — 8 527 = 473 241
1902	490 552 — 8 277 = 482 275
1903	474 811 — 7 350 = 467 461
1904	485 433 — 7 053 = 478 380
1905	479 434 — 6 673 = 472 761

Die Sterbenswahrscheinlichkeiten der Geborenen von 1891 bis 1905 in ihrem vierten Lebensjahre lauten also:

n	Knaben	Mädchen	n	Knaben	Mädchen
1891	6793 / 413 471	6454 / 411 006	1899	5447 / 454 810	5263 / 452 344
1892	5712 / 402 748	5552 / 399 570	1900	5164 / 458 267	5027 / 454 754
1893	5698 / 426 009	5557 / 422 179	1901	5278 / 479 636	5235 / 473 241
1894	5207 / 428 077	5246 / 423 826	1902	4877 / 487 584	4799 / 482 275
1895	5881 / 431 457	5413 / 429 197	1903	4489 / 473 382	4356 / 467 461
1896	5847 / 446 318	5660 / 442 079	1904	4425 / 485 211	4259 / 478 380
1897	5736 / 448 018	5451 / 443 498	1905	4444 / 479 702	4198 / 472 761
1898	5578 / 456 562	5459 / 451 919			

Über die Stabilität dieser Reihen entscheiden wir wieder mit Hilfe unseres Kriteriums. v, $[\delta^2]$ nehmen hier folgende Werte an:

a) Knaben.

n	$1000\,v$	$1000\,\delta$	$1000^2\,\delta^2$
1891	16	$+4$	16
1892	14	$+2$	4
1893	13	$+1$	1
1894	12	± 0	0
1895	14	$+2$	4
1896	13	$+1$	1
1897	13	$+1$	1
1898	12	± 0	0
1899	12	± 0	0
1900	11	-1	1
1901	11	-1	1
1902	10	-2	4
1903	9	-3	9
1904	9	-3	9
1905	9	-3	9
	$178 : 15 = 12 = 10^3\,v$		$60 = 10^6\,[\delta^2]$

b) Mädchen.

n	$1000\,v$	$1000\,\delta$	$1000^2\,\delta^2$
1891	16	$+4$	16
1892	14	$+2$	4
1893	13	$+1$	1
1894	12	± 0	0
1895	13	$+1$	1
1896	13	$+1$	1
1897	12	± 0	0
1898	12	± 0	0
1899	12	± 0	0
1900	11	-1	1
1901	11	-1	1
1902	10	-2	4
1903	9	-3	9
1904	9	-3	9
1905	9	-3	9
	$176 : 15 = 12 = 10^3\,v$		$56 = 10^6\,[\delta^2]$

Für g ergibt sich in der bekannten Weise:

a) Knaben.

402 748
487 584
890 332 : 2 = 445 166 = g,

b) Mädchen.

399 570
482 275
881 845 : 2 = 440 923 = g.

Es sind also die Ausdrücke zu berechnen:

a) Knaben.

$$1000\,R = 0{,}4769\sqrt{\frac{2.60}{14}} = 1{,}396;$$

$$1000\,r = 0{,}4769\sqrt{\frac{2.12.988}{445\,166}} = 0{,}1101.$$

b) Mädchen.

$$1000\,R = 0{,}4769\sqrt{\frac{2.56}{14}} = 1{,}349;$$

$$1000\,r = 0{,}4769\sqrt{\frac{2.12.988}{440\,923}} = 0{,}1106.$$

Wir erhalten demnach für das Kriterium der Stabilität die Werte:

a) Knaben.

$$Q = \frac{1000\,R}{1000\,r} = \frac{1{,}396}{0{,}1101} = 12{,}3,$$

b) Mädchen.

$$Q = \frac{1000\,R}{1000\,r} = \frac{1{,}349}{0{,}1106} = 12{,}2.$$

Wie vorauszusehen war, haben wir infolge der Veränderung der Grundwahrscheinlichkeit wieder übernormale Dispersion erhalten. Dieses Resultat interessiert uns aber jetzt weniger. Unser Augenmerk richtet sich hauptsächlich auf die schon bei den früheren Altersklassen verfolgte Entwickelung der Stabilität mit dem Alter der Kinder. Die Regel dafür lehrt die physische Dispersion. Dafür haben wir bisher folgende Werte gefunden:

Alter	$1000\,p = 1000\,R$	
	Knaben	Mädchen
0—1 Jahr	6,94	6,12
1—2 „	3,95	3,52
2—3 „	2,92	2,64
3—4 „	1,40	1,35

Die Werte für die vierte Altersklasse passen sehr gut in die bisherige Entwickelung hinein. Wir haben damit das wichtige und interessante Resultat der mit dem Alter zunehmenden Stabilität für die Reihen der Kindersterblichkeiten bestätigt gefunden.

Auf Grund der Resultate für die drei ersten Altersklassen konnten wir aber noch ein anderes Resultat beobachten. In den allerersten Lebensjahren ist die Stabilität der Sterbenswahrscheinlichkeiten der Mädchen etwas größer als die der Knaben. Als Grund hierfür hatten wir die größere Hinfälligkeit der Knaben gegenüber den Todesursachen während dieser Altersjahre angenommen. Wenn diese Theorie richtig wäre, müßte in späteren Kinderjahren, in denen die Sterbensverhältnisse der beiden Geschlechter sich mehr und mehr gleichstellen, weil die Todesursachen in gleicher Weise wirken, annähernd gleiche Stabilität bei beiden Geschlechtern auftreten. Tatsächlich sind die Maße der Dispersion schon für das Alter von 3 bis 4 Jahren fast übereinstimmend.

Zur weiteren Prüfung dieser Resultate ziehen wir noch die fünfte und sechste Altersklasse heran.

Bei der fünften Altersklasse erhalten wir die unteren Elementargesamtheiten nach der Formel

$$ {}_nM_t^2 - {}_n\Delta_4^2 = {}_n\Delta_5^1; \quad t = n + 4. $$

a) Knaben.

t	n	${}_nM_t^2 - {}_n\Delta_4^2 = {}_n\Delta_5^1$
1895	1891	5234 — 2889 = 2345
1896	1892	4711 — 2680 = 2031
1897	1893	4337 — 2471 = 1866
1898	1894	4594 — 2499 = 2095
1899	1895	5063 — 2891 = 2172
1900	1896	4795 — 2726 = 2069
1901	1897	4902 — 2779 = 2123

t	n	${}_nM_t^2 - {}_nA_4^2 = {}_nA_5^1$
1902	1898	4525 — 2507 = 2018
1903	1899	4604 — 2630 = 1974
1904	1900	4301 — 2325 = 1976
1905	1901	4364 — 2524 = 1840
1906	1902	4059 — 2268 = 1791
1907	1903	3746 — 2055 = 1691
1908	1904	3850 — 2112 = 1738
1909	1905	3744 — 2188 = 1556
1910	1906	3547 — 1960 = 1587
1911	1907	3502 — 1899 = 1603

b) Mädchen.

t	n	${}_nM_t^2 - {}_nA_4^2 = {}_nA_5^1$
1895	1891	4893 — 2680 = 2213
1896	1892	4660 — 2615 = 2045
1897	1893	4334 — 2540 = 1794
1898	1894	4423 — 2488 = 1935
1899	1895	4789 — 2640 = 2149
1900	1896	4706 — 2644 = 2062
1901	1897	4903 — 2668 = 2235
1902	1898	4377 — 2447 = 1930
1903	1899	4475 — 2488 = 1987
1904	1900	4167 — 2250 = 1917
1905	1901	4148 — 2436 = 1712
1906	1902	4018 — 2223 = 1795
1907	1903	3510 — 1964 = 1546
1908	1904	3727 — 2078 = 1649
1909	1905	3539 — 2021 = 1518
1910	1906	3273 — 1774 = 1499
1911	1907	3340 — 1765 = 1575

Die oberen Elementargesamtheiten ergeben sich durch die Formel

$$ {}_tM_5^3 - {}_{n+1}A_5^1 = {}_nA_5^2; \quad t = n + 5. $$

a) Knaben.

t	n	${}_tM_5^3 - {}_{n+1}A_5^1 = {}_nA_5^2$
1896	1891	3944 — 2031 = 1913
1897	1892	3466 — 1866 = 1600
1898	1893	3873 — 2095 = 1778
1899	1894	4217 — 2172 = 2045

t	n	${}_tM_5^3 - {}_{n+1}A_5^1 = {}_nA_5^2$
1900	1895	3903 — 2069 = 1834
1901	1896	4154 — 2123 = 2031
1902	1897	3761 — 2018 = 1743
1903	1898	3922 — 1974 = 1948
1904	1899	3679 — 1976 = 1703
1905	1900	3599 — 1840 = 1759
1906	1901	3368 — 1791 = 1577
1907	1902	3310 — 1691 = 1619
1908	1903	3226 — 1738 = 1488
1909	1904	3110 — 1556 = 1554
1910	1905	2972 — 1587 = 1385
1911	1906	3000 — 1603 = 1397

b) Mädchen.

t	n	${}_tM_5^3 - {}_{n+1}A_5^1 = {}_nA_5^2$
1896	1891	3966 — 2045 = 1921
1897	1892	3437 — 1794 = 1643
1898	1893	3699 — 1935 = 1764
1899	1894	4189 — 2149 = 2040
1900	1895	3946 — 2062 = 1884
1901	1896	4181 — 2235 = 1946
1902	1897	3801 — 1930 = 1871
1903	1898	3876 — 1987 = 1889
1904	1899	3651 — 1917 = 1734
1905	1900	3465 — 1712 = 1753
1906	1901	3356 — 1795 = 1561
1907	1902	3092 — 1546 = 1546
1908	1903	3065 — 1649 = 1416
1909	1904	2954 — 1518 = 1436
1910	1905	2853 — 1499 = 1354
1911	1906	2909 — 1575 = 1334

Die Berechnung der ersten Hauptgesamtheiten von Verstorbenen lautet:

a) Knaben.

n	${}_nA_5^1 + {}_nA_5^2 = {}_nM_5^1$
1891	2345 + 1913 = 4258
1892	2031 + 1600 = 3631
1893	1866 + 1778 = 3644
1894	2095 + 2045 = 4140
1895	2172 + 1834 = 4006
1896	2069 + 2031 = 4100
1897	2123 + 1743 = 3866
1898	2018 + 1948 = 3966
1899	1974 + 1703 = 3677
1900	1976 + 1759 = 3735
1901	1840 + 1577 = 3417
1902	1791 + 1619 = 3410
1903	1691 + 1488 = 3179
1904	1738 + 1554 = 3292
1905	1556 + 1385 = 2941

b) Mädchen.

n	${}_nA_5^1 + {}_nA_5^2 = {}_nM_5^1$
1891	2213 + 1921 = 4134
1892	2045 + 1643 = 3688
1893	1794 + 1764 = 3558
1894	1935 + 2040 = 3975
1895	2149 + 1884 = 4033
1896	2062 + 1946 = 4008
1897	2235 + 1871 = 4106
1898	1930 + 1889 = 3819
1899	1987 + 1734 = 3721
1900	1917 + 1753 = 3670
1901	1712 + 1561 = 3273
1902	1795 + 1546 = 3341
1903	1546 + 1416 = 2962
1904	1649 + 1436 = 3085
1905	1518 + 1354 = 2872

Die Überlebenden von vier Jahren erhalten wir folgendermaßen:

a) Knaben.

n	${}_nL_3^1 - {}_nM_4^1 = {}_nL_4^1$
1891	413 471 — 6793 = 406 678
1892	402 748 — 5712 = 397 036
1893	426 009 — 5698 = 420 311
1894	428 077 — 5207 = 422 870
1895	431 457 — 5881 = 425 576
1896	446 318 — 5847 = 440 471
1897	448 018 — 5736 = 442 282
1898	456 562 — 5578 = 450 984
1899	454 810 — 5447 = 449 363
1900	458 267 — 5164 = 453 103
1901	479 636 — 5278 = 474 358
1902	487 584 — 4877 = 482 707
1903	473 382 — 4489 = 468 893
1904	485 211 — 4425 = 480 786
1905	479 702 — 4444 = 475 258

b) Mädchen.

n	${}_nL_3^1 - {}_nM_4^1 = {}_nL_4^1$
1891	411 006 — 6454 = 404 552
1892	399 570 — 5552 = 394 018
1893	422 179 — 5557 = 416 622
1894	423 826 — 5246 = 418 580
1895	429 197 — 5413 = 423 784
1896	442 079 — 5660 = 436 419
1897	443 498 — 5451 = 438 047
1898	451 919 — 5459 = 446 460
1899	452 344 — 5263 = 447 081
1900	454 754 — 5027 = 449 727
1901	473 241 — 5235 = 468 006
1902	482 275 — 4799 = 477 476
1903	467 461 — 4356 = 463 105
1904	478 380 — 4259 = 474 121
1905	472 761 — 4198 = 468 563

Die Sterbenswahrscheinlichkeiten lauten:

n	Knaben	Mädchen	n	Knaben	Mädchen
1891	4258 / 406 678	4134 / 404 552	1899	3677 / 449 363	3721 / 447 081
1892	3631 / 397 036	3688 / 394 018	1900	3735 / 453 103	3670 / 449 727
1893	3644 / 420 311	3558 / 416 622	1901	3417 / 474 358	3273 / 468 006
1894	4140 / 422 870	3975 / 418 580	1902	3410 / 482 707	3341 / 477 476
1895	4006 / 425 576	4033 / 423 784	1903	3179 / 468 893	2962 / 463 105
1896	4100 / 440 471	4008 / 436 419	1904	3292 / 480 786	3085 / 474 121
1897	3866 / 442 282	4106 / 438 047	1905	2941 / 475 258	2872 / 468 563
1898	3966 / 450 984	3819 / 446 460			

Wir untersuchen die Stabilität dieser Reihen in der bekannten Weise.

Für v und $[\delta^2]$ ergibt sich:

a) Knaben.

n	$1000\,v$	$1000\,\delta$	$1000^2\,\delta^2$
1891	10	$+2$	4
1892	9	$+1$	1
1893	9	$+1$	1
1894	10	$+2$	4
1895	9	$+1$	1
1896	9	$+1$	1
1897	9	$+1$	1
1898	9	$+1$	1
1899	8	± 0	0
1900	8	± 0	0
1901	7	-1	1
1902	7	-1	1
1903	7	-1	1
1904	7	-1	1
1905	6	-2	4
	$124 : 15 = 8 = 10^3\,v$		$22 = 10^6\,[\delta^2]$

b) Mädchen.

n	$1000\,v$	$1000\,\delta$	$1000^2\,\delta^2$
1891	10	+2	4
1892	9	+1	1
1893	9	+1	1
1894	9	+1	1
1895	10	+2	4
1896	9	+1	1
1897	9	+1	1
1898	9	+1	1
1899	8	±0	0
1900	8	±0	0
1901	7	−1	1
1902	7	−1	1
1903	6	−2	4
1904	7	−1	1
1905	6	−2	4
	$123 : 15 = 8 = 10^3\,v$		$25 = 10^6\,[\delta^2]$

g berechnet sich:

a) Knaben.

397 036
482 707
879 743 : 2 = 439 872 = g.

b) Mädchen.

394 018
477 476
871 494 : 2 = 435 747 = g.

Diese Werte setzen wir in die Formeln für R und r ein:

a) Knaben.

$$1000\,R = 0{,}4769\,\sqrt{\frac{2\,.\,22}{14}} = 0{,}8455;$$

$$1000\,r = 0{,}4769\,\sqrt{\frac{2\,.\,8\,.\,992}{439\,872}} = 0{,}0906.$$

b) Mädchen.

$$1000\,R = 0{,}4769\,\sqrt{\frac{2\,.\,25}{14}} = 0{,}9013;$$

$$1000\,r = 0{,}4769\,\sqrt{\frac{2\,.\,8\,.\,992}{435\,747}} = 0{,}0910.$$

Das Stabilitätskriterium nimmt für die fünfte Altersklasse folgende Werte an:

a) Knaben.

$$Q = \frac{1000\,R}{1000\,r} = \frac{0{,}8455}{0{,}0906} = 9{,}3.$$

b) Mädchen.

$$Q = \frac{1000\,R}{1000\,r} = \frac{0{,}9013}{0{,}0910} = 9{,}9.$$

Wir ziehen schließlich noch die sechste Altersklasse zur Untersuchung heran und hätten damit die Kinder in bezug auf die Stabilitätsverhältnisse der Sterbenswahrscheinlichkeiten bis zum schulpflichtigen Alter verfolgt.

Berechnung der unteren Elementargesamtheiten:

a) Knaben.

$t = n + 5$	n	${}_nM_t^2 - {}_n\Delta_5^2 = {}_n\Delta_6^1$
1896	1891	3483 — 1913 = 1570
1897	1892	2995 — 1600 = 1395
1898	1893	3133 — 1778 = 1355
1899	1894	3693 — 2045 = 1648
1900	1895	3418 — 1834 = 1584
1901	1896	3649 — 2031 = 1618
1902	1897	3218 — 1743 = 1475
1903	1898	3420 — 1948 = 1472
1904	1899	3164 — 1703 = 1461
1905	1900	3018 — 1759 = 1259
1906	1901	2916 — 1577 = 1339
1907	1902	2914 — 1619 = 1295
1908	1903	2763 — 1488 = 1275
1909	1904	2795 — 1554 = 1241
1910	1905	2546 — 1385 = 1161
1911	1906	2626 — 1397 = 1229

b) Mädchen.

$t = n + 5$	n	${}_nM_t^2 - {}_n\Delta_5^2 = {}_n\Delta_6^1$
1896	1891	3522 — 1921 = 1601
1897	1892	2961 — 1643 = 1318
1898	1893	3119 — 1764 = 1355
1899	1894	3653 — 2040 = 1613
1900	1895	3379 — 1884 = 1495
1901	1896	3534 — 1946 = 1588
1902	1897	3385 — 1871 = 1514
1903	1898	3437 — 1889 = 1548
1904	1899	3220 — 1734 = 1486
1905	1900	3034 — 1753 = 1281
1906	1901	2874 — 1561 = 1313
1907	1902	2846 — 1546 = 1300
1908	1903	2662 — 1416 = 1246
1909	1904	2667 — 1436 = 1231
1910	1905	2384 — 1354 = 1030
1911	1906	2463 — 1334 = 1129

Berechnung der oberen Elementargesamtheiten:

a) Knaben.

$t = n + 6$	n	${}_tM_6^3 - {}_{n+1}\Delta_6^1 = {}_n\Delta_6^2$
1897	1891	2649 — 1395 = 1254
1898	1892	2477 — 1355 = 1122
1899	1893	3104 — 1648 = 1456
1900	1894	2945 — 1584 = 1361
1901	1895	3087 — 1618 = 1469
1902	1896	2826 — 1475 = 1351
1903	1897	2891 — 1472 = 1419
1904	1898	2689 — 1461 = 1228
1905	1899	2578 — 1259 = 1319
1906	1900	2522 — 1339 = 1183
1907	1901	2470 — 1295 = 1175
1908	1902	2482 — 1275 = 1207
1909	1903	2447 — 1241 = 1206
1910	1904	2218 — 1161 = 1057
1911	1905	2263 — 1229 = 1034

b) Mädchen.

$t = n+6$	n	${}_tM_6^3 - {}_{n+1}\Delta_6^1 = {}_n\Delta_6^2$
1897	1891	2583 — 1318 = 1265
1898	1892	2572 — 1355 = 1217
1899	1893	3069 — 1613 = 1456
1900	1894	2858 — 1495 = 1363
1901	1895	2997 — 1588 = 1409
1902	1896	2878 — 1514 = 1364
1903	1897	2921 — 1548 = 1373
1904	1898	2775 — 1486 = 1289
1905	1899	2700 — 1281 = 1419
1906	1900	2457 — 1313 = 1144
1907	1901	2441 — 1300 = 1141
1908	1902	2421 — 1246 = 1175
1909	1903	2384 — 1231 = 1153
1910	1904	2096 — 1030 = 1066
1911	1905	2164 — 1129 = 1035

Berechnung der ersten Hauptgesamtheiten von Verstorbenen.

a) Knaben.

n	${}_n\Delta_6^1 + {}_n\Delta_6^2 = {}_nM_6^1$
1891	1570 + 1254 = 2824
1892	1395 + 1122 = 2517
1893	1355 + 1456 = 2811
1894	1648 + 1361 = 3009
1895	1548 + 1469 = 3017
1896	1618 + 1351 = 2969
1897	1475 + 1419 = 2894
1898	1472 + 1228 = 2700
1899	1461 + 1319 = 2780
1900	1259 + 1183 = 2442
1901	1339 + 1175 = 2514
1902	1295 + 1207 = 2502
1903	1275 + 1206 = 2481
1904	1241 + 1057 = 2298
1905	1161 + 1034 = 2195

b) Mädchen.

n	${}_nA_6^1 + {}_nA_6^2 = {}_nM_6^1$
1891	1601 + 1265 = 2866
1892	1318 + 1217 = 2535
1893	1355 + 1456 = 2811
1894	1613 + 1363 = 2976
1895	1495 + 1409 = 2904
1896	1588 + 1364 = 2952
1897	1514 + 1373 = 2887
1898	1548 + 1289 = 2837
1899	1486 + 1419 = 2905
1900	1281 + 1144 = 2425
1901	1313 + 1141 = 2454
1902	1300 + 1175 = 2475
1903	1246 + 1153 = 2399
1904	1231 + 1066 = 2297
1905	1030 + 1035 = 2065

Berechnung der Überlebenden von fünf Jahren.

a) Knaben.

n	${}_nL_4^1 - {}_nM_5^1 = {}_nL_5^1$
1891	406 678 — 4258 = 402 420
1892	397 036 — 3631 = 393 405
1893	420 311 — 3644 = 416 667
1894	422 870 — 4140 = 418 730
1895	425 576 — 4006 = 421 570
1896	440 471 — 4100 = 436 371
1897	442 282 — 3866 = 438 416
1898	450 984 — 3966 = 447 018
1899	449 363 — 3677 = 445 686
1900	453 103 — 3735 = 449 368
1901	474 358 — 3417 = 470 941
1902	482 707 — 3410 = 479 297
1903	468 893 — 3179 = 465 714
1904	480 786 — 3292 = 477 494
1905	475 258 — 2941 = 472 317

b) Mädchen.

n	${}_nL_4^1 - {}_nM_5^1 = {}_nL_5^1$
1891	404 552 — 4134 = 400 418
1892	394 018 — 3688 = 390 330
1893	416 622 — 3558 = 413 064
1894	418 580 — 3975 = 414 605
1895	423 784 — 4033 = 419 751
1896	436 419 — 4008 = 432 411
1897	438 047 — 4106 = 433 941
1898	446 460 — 3819 = 442 641
1899	447 081 — 3721 = 443 360
1900	449 727 — 3670 = 446 057
1901	468 006 — 3273 = 464 733
1902	477 476 — 3341 = 474 135
1903	463 105 — 2962 = 460 143
1904	474 121 — 3085 = 471 036
1905	468 563 — 2872 = 465 691

Die Sterbenswahrscheinlichkeiten der sechsten Altersklasse lauten demnach:

n	Knaben	Mädchen	n	Knaben	Mädchen
1891	$\frac{2824}{402\,420}$	$\frac{2866}{400\,418}$	1899	$\frac{2780}{445\,686}$	$\frac{2905}{443\,360}$
1892	$\frac{2517}{393\,405}$	$\frac{2535}{390\,330}$	1900	$\frac{2442}{449\,368}$	$\frac{2425}{446\,057}$
1893	$\frac{2811}{416\,667}$	$\frac{2811}{413\,064}$	1901	$\frac{2514}{470\,941}$	$\frac{2454}{464\,733}$
1894	$\frac{3009}{418\,730}$	$\frac{2976}{414\,605}$	1902	$\frac{2502}{479\,297}$	$\frac{2475}{474\,135}$
1895	$\frac{3017}{421\,570}$	$\frac{2904}{419\,751}$	1903	$\frac{2481}{465\,714}$	$\frac{2399}{460\,143}$
1896	$\frac{2969}{436\,371}$	$\frac{2952}{432\,411}$	1904	$\frac{2298}{477\,494}$	$\frac{2297}{471\,036}$
1897	$\frac{2894}{438\,416}$	$\frac{2887}{433\,941}$	1905	$\frac{2195}{472\,317}$	$\frac{2065}{465\,691}$
1898	$\frac{2700}{447\,018}$	$\frac{2837}{442\,641}$			

Zur Untersuchung der Stabilität dieser Reihen werden zunächst die speziellen Werte für v und $[\delta^2]$ berechnet.

a) Knaben.

n	$1000\,v$	$1000\,\delta$	$1000^2\,\delta^2$
1891	7,0[1])	+ 1,0	1,00
1892	6,4	+ 0,4	0,16
1893	6,7	+ 0,7	0,49
1894	7,2	+ 1,2	1,44
1895	7,2	+ 1,2	1,44
1896	6,8	+ 0,8	0,64
1897	6,6	+ 0,6	0,36
1898	6,0	± 0,0	0,00
1899	6,2	+ 0,2	0,04
1900	5,4	— 0,6	0,36
1901	5,3	— 0,7	0,49
1902	5,2	— 0,8	0,64
1903	5,3	— 0,7	0,49
1904	4,8	— 1,2	1,44
1905	4,6	— 1,4	1,96
	$90{,}7 : 15 = 6{,}0 = 10^3\,v$		$10{,}95 = 10^6\,[\delta^2]$ rund 11,00

b) Mädchen.

n	$1000\,v$	$1000\,\delta$	$1000^2\,\delta^2$
1891	7,2[1])	+ 1,1	1,21
1892	6,5	+ 0,4	0,16
1893	6,8	+ 0,7	0,49
1894	7,2	+ 1,1	1,21
1895	6,9	+ 0,8	0,64
1896	6,8	+ 0,7	0,49
1897	6,7	+ 0,6	0,36
1898	6,4	+ 0,3	0,09
1899	6,6	+ 0,5	0,25
1900	5,4	— 0,7	0,49
1901	5,3	— 0,8	0,64
1902	5,2	— 0,9	0,81
1903	5,2	— 0,9	0,81
1904	4,9	— 1,2	1,44
1905	4,4	— 1,7	2,89
	$91{,}5 : 15 = 6{,}1 = 10^3\,v$		$11{,}98 = 10^6\,[\delta^2]$ rund 12,00

[1]) Die Rechnung ist hier auf Zehntel genau.

g nimmt hier folgende Werte an:

a) Knaben.

393 405
479 297
872 702 : 2 = 436 351 = g,

b) Mädchen.

390 330
474 135
864 465 : 2 = 432 233 = g.

Es ergibt sich also für die sechste Altersklasse für R und r:

a) Knaben.

$$1000\,R = 0{,}4769\sqrt{\frac{2.11}{14}} = 0{,}5978;$$

$$1000\,r = 0{,}4769\sqrt{\frac{2.6.994}{436\,351}} = 0{,}0789.$$

b) Mädchen.

$$1000\,R = 0{,}4769\sqrt{\frac{2.12}{14}} = 0{,}6244;$$

$$1000\,r = 0{,}4769\sqrt{\frac{2.6{,}1.993{,}9}{432\,233}} = 0{,}0799.$$

Demnach hat das Stabilitätskriterium für die sechste Altersklasse die Werte:

a) Knaben.

$$Q = \frac{1000\,R}{1000\,r} = \frac{0{,}5978}{0{,}0789} = 7{,}6,$$

b) Mädchen.

$$Q = \frac{1000\,R}{1000\,r} = \frac{0{,}6244}{0{,}0799} = 7{,}8.$$

Diese Ergebnisse bestätigen sehr schön unsere bisherigen Gesetze. Auch für die fünfte und sechste Altersklasse ist die Dispersion noch reichlich übernormal. Doch sind die Reihen hier wieder um ein gut Teil stabiler geworden. Diese Entwickelung kann an dem Schema der physischen Schwankungskomponente verfolgt werden.

Alter	Knaben	Mädchen
0—1 Jahr	6,94	6,12
1—2 „	3,95	3,52
2—3 „	2,92	2,64
3—4 „	1,40	1,35
4—5 „	0,85	0,90
5—6 „	0,60	0,62

Endlich bestätigt sich auch unsere Erwartung wenigstens annähernd gleicher Stabilitätsverhältnisse für beide Geschlechter in der fünften und sechsten Altersklasse.

Damit haben wir an einem Beispiel aus der preußischen Statistik gesehen, daß Reihen von absoluten Sterbenswahrscheinlichkeiten der ersten Altersjahre bei beiden Geschlechtern nicht das Maximum der Stabilität erreichen. Als Grund ergibt sich vor allem die Abnahme der Kindersterblichkeit. Sehr bemerkenswert ist, daß die Generation von 1891 durch die sechs betrachteten Altersklassen hindurch eine relativ hohe Sterblichkeit aufweist. Es ist hier vielleicht an die ungewöhnlich hohen Getreidepreise jenes Jahres zu erinnern.

Im allgemeinen hat sich gezeigt, daß die Reihen stabiler wurden, je höhere Altersklassen genommen wurden. Grund dafür waren günstigere Sterbensverhältnisse in späteren Kinderjahren. Ferner ergaben sich etwa bis zum dritten Lebensjahre günstigere Stabilitätsverhältnisse für Mädchen; dann stellte sich annähernd Gleichheit in diesem Punkte ein. Hier kamen als Gründe ungünstige Sterbebedingungen für Knaben in den ersten Altersjahren und Gleichheit derselben für beide Geschlechter in späteren Kinderjahren in Betracht.

Anmerkung: Seit 1904 enthält die preußische amtliche Statistik auch eine Tabelle über die Gestorbenen nach Geburtsjahren mit der Unterscheidung, ob sie vor oder nach ihrem Geburtstag gestorben sind. Diese Zahlen stellen also unmittelbar die Elementargesamtheiten dar. Bei unseren Berechnungen haben wir aber auch für die Jahre nach 1903 dasselbe Schema befolgt, wie für 1891 bis 1903.

II.

Es ist ohne Zweifel für die Gesellschaftswissenschaft von der größten Bedeutung, daß sich mit Hilfe von Stabilitätsuntersuchungen durch Rückschlüsse auf die Erscheinung der Sterblichkeit wichtige sozialstatistische Ergebnisse finden lassen. Daher wird es von wesentlichem Interesse sein, diesen Punkt noch etwas weiter zu verfolgen.

Wir hatten durch ein mathematisches Kriterium entschieden, daß die Schwankungen der Sterbenswahrscheinlichkeiten der ersten Altersjahre für die Generationen von 1891 bis 1905 in Preußen nicht einen rein zufälligen Charakter haben, sondern daß spezielle Ursachen in Wirkung treten und die Grundwahrscheinlichkeit mehr oder weniger beeinflussen. So konnten wir die sich für alle Altersklassen ergebende subnormale Stabilität vor allem auf die deutlich hervortretende Senkung der Sterblichkeit in den Jahren von 1891 bis 1905 zurückführen.

Wir wissen aber dadurch noch nicht, in welcher Weise die Senkung der Sterblichkeit in jenem Zeitraum zur Wirkung kommt, ob sie gleichmäßig vorhanden ist oder eine gewisse Entwickelung erfährt. Wir können uns aber hierüber leicht Aufklärung verschaffen, wenn wir den Zeitraum teilen, die einzelnen Abschnitte auf ihre Stabilität hin prüfen und dann die Resultate vergleichen. Hier wollen wir z. B. die Zeit von 1891 bis 1900 und die von 1896 bis 1905 zur Untersuchung wählen und die Rechnung für die Altersklasse von 0 bis 1 Jahre ausführen, und außerdem noch die Generation von 1901 bis 1910 heranziehen, da die Hinzunahme dieses Zeitraumes über die Senkung der Sterblichkeit vom Jahre 1891 bis in die Gegenwart ein abschließendes Urteil erlaubt.

Zunächst mag eine oberflächliche Betrachtung der Sterbenswahrscheinlichkeiten in den Jahren 1891 bis 1910 für die Altersklasse von 0 bis 1 Jahre ein ungefähres Bild von dem Verlauf der Erscheinung geben.

Geburtsjahr	Knaben	Mädchen	Geburtsjahr	Knaben	Mädchen
1891	0,221 50	0,187 73	1901	0,208 42	0,177 61
1892	0,226 70	0,192 89	1902	0,191 16	0,161 28
1893	0,223 09	0,192 26	1903	0,205 60	0,175 42
1894	0,211 30	0,180 30	1904	0,206 23	0,175 45
1895	0,224 96	0,191 00	1905	0,204 31	0,173 45
1896	0,211 25	0,180 00	1906	0,190 13	0,160 46
1897	0,213 11	0,182 65	1907	0,182 89	0,154 28
1898	0,214 78	0,183 85	1908	0,182 83	0,154 68
1899	0,221 97	0,188 46	1909	0,173 88	0,147 12
1900	0,226 87	0,193 55	1910	0,176 36	0,150 07

Es fällt auf den ersten Blick auf, daß in den Jahren 1891 bis 1900 eine Senkung der Sterblichkeit kaum zu beobachten ist, daß vielmehr eine mehr zufällige Verteilung der Einzelwerte um den Mittelwert vorhanden zu sein scheint. Ein ganz anderes Bild bietet dagegen der Zeitraum von 1901 bis 1910. Hier ist eine fast stetige, starke Abnahme der Sterblichkeit zu verzeichnen. Ganz eigenartig sind endlich die Verhältnisse für die mittlere Periode von 1896 bis 1905. Zunächst steigt hier sogar die Sterblichkeit bis zum Jahre 1900, um dann mit starker Oszillation rapide abzufallen. Wie bringt nun unser Stabilitätskriterium diese Resultate zahlenmäßig zum Ausdruck?

Für den Zeitraum von 1891 bis 1900 ergibt sich folgender Mittelwert:

a) Knaben.

	$1000\,v$	$1000\,\delta$	$1000^2\,\delta^2$
1891	222	+ 2	4
1892	227	+ 7	49
1893	223	+ 3	9
1894	211	— 9	81
1895	225	+ 5	25
1896	211	— 9	81
1897	213	— 7	49
1898	215	— 5	25
1899	222	+ 2	4
1900	227	+ 7	49
	$2196 : 10 = 219{,}6$ rund $220 = 10^3\,v$		$376 = 10^6\,[\delta^2]$

b) Mädchen.

	$10^3 v$	$10^3 \delta$	$10^6 \delta^2$
1891	188	+ 1	1
1892	193	+ 6	36
1893	192	+ 5	25
1894	180	− 7	49
1895	191	+ 4	16
1896	180	− 7	49
1897	183	− 4	16
1898	184	− 3	9
1899	188	+ 1	1
1900	194	+ 7	49
	1873 : 10 = 187,3		251 = $10^6 [\delta^2]$
	rund 187 = $10^3 v$		

Als Grundzahlen sind hier die Werte zu nehmen:

a) Knaben.

568 461
634 234
1 202 695 : 2 = 601 348 = g,

b) Mädchen.

538 042
601 485
1 139 527 : 2 = 569 764 = g,

so daß die Werte ergeben:

$$1000 R = 0{,}4769 \sqrt{\frac{2 \cdot 376}{9}} = 4{,}3593,$$

$$1000 r = 0{,}4769 \sqrt{\frac{2 \cdot 220 \cdot 780}{601\,348}} = 0{,}3603$$

für die Knaben, sowie

$$1000 R = 0{,}4769 \sqrt{\frac{2 \cdot 251}{9}} = 3{,}5618,$$

$$1000 r = 0{,}4769 \sqrt{\frac{2 \cdot 187 \cdot 813}{569\,764}} = 0{,}3484$$

für die Mädchen.

Das Stabilitätskriterium hat demnach die Werte für Knaben

$$Q = \frac{1000 R}{1000 r} = \frac{4{,}36}{0{,}36} = 12{,}1;$$

für Mädchen

$$Q = \frac{1000 R}{1000 r} = \frac{3{,}56}{0{,}35} = 10{,}2.$$

Wir gehen zu dem Zeitraume 1896 bis 1905 über. Hier lautet die Berechnung von v und $[\delta^2]$:

a) Knaben.

	$10^3 v$	$10^3 \delta$	$10^6 \delta^2$
1896	211	+ 1	1
1897	213	+ 3	9
1898	215	+ 5	25
1899	222	+ 12	144
1900	227	+ 17	289
1901	208	− 2	4
1902	191	− 19	361
1903	206	− 4	16
1904	206	− 4	16
1905	204	− 6	36
	2103 : 10 = 210,3 rund $210 = 10^3 v$		$901 = 10^6 [\delta^2]$

b) Mädchen.

	$10^3 v$	$10^3 \delta$	$10^6 \delta^2$
1896	180	+ 1	1
1897	183	+ 4	36
1898	184	+ 5	25
1899	188	+ 9	81
1900	194	+ 15	225
1901	178	− 1	1
1902	161	− 18	324
1903	175	− 4	16
1904	175	− 4	16
1905	173	− 6	36
	1791 : 10 = 179,1 rund $179 = 10^3 v$		$741 = 10^6 [\delta^2]$

Die Grundzahlen berechnen sich zu:

a) Knaben.

607 461
649 348
1 256 809 : 2 = 628 405 = g,

b) Mädchen.

577 823
615 186
1 193 009 : 2 = 596 505 = g.

Die Ausdrücke R und r nehmen demnach die Werte an, für Knaben:

$$1000\,R = 0{,}4769\sqrt{\frac{2.901}{9}} = 6{,}7482;$$

$$1000\,r = 0{,}4769\sqrt{\frac{2.210.790}{628\,405}} = 0{,}34\,654,$$

sowie für Mädchen:

$$1000\,R = 0{,}4769\sqrt{\frac{2.741}{9}} = 6{,}120;$$

$$1000\,r = 0{,}4769\sqrt{\frac{2.179.821}{596\,505}} = 0{,}33\,476,$$

so daß das Stabilitätskriterium für die Zeit von 1896 bis 1905 die Werte annimmt für Knaben

$$Q = \frac{1000\,R}{1000\,r} = \frac{6{,}748}{0{,}3465} = 19{,}5;$$

für Mädchen

$$Q = \frac{1000\,R}{1000\,r} = \frac{6{,}12}{0{,}335} = 18{,}3.$$

Für den jüngsten Zeitraum von 1901 bis 1910 ergibt sich folgender Mittelwert:

a) Knaben.

	$10^3\,v$	$10^3\,\delta$	$10^6\,\delta^2$
1901	208	+ 16	256
1902	191	— 1	1
1903	206	+ 14	196
1904	206	+ 14	196
1905	204	+ 12	144
1906	190	— 2	4
1907	183	— 9	81
1908	183	— 9	81
1909	174	— 18	324
1910	176	— 16	256
	1921 : 10 = 192,1 rund 192 = $10^3\,v$		1539 = $10^6\,[\delta^2]$

b) Mädchen.

	$10^3 v$	$10^3 \delta$	$10^6 \delta^2$
1901	178	+ 15	225
1902	161	— 2	4
1903	175	+ 12	144
1904	175	+ 12	144
1905	173	+ 10	100
1906	160	— 3	9
1907	154	— 9	81
1908	155	— 8	64
1909	147	— 16	256
1910	150	— 13	169
	1628 : 10 = 162,8		1196 = $10^6 [\delta^2]$
	rund 163 = $10^3 v$		

Die Grundzahlen lauten hier:

a) Knaben.

626 031
652 416
1 278 447 : 2 = 639 224 = g,

b) Mädchen.

593 416
617 973
1 211 389 : 2 = 605 695 = g.

Durch Einsetzung dieser Werte in unsere Formeln erhalten wir für Knaben

$$1000 R = 0{,}4769 \sqrt{\frac{2 \cdot 1539}{9}} = 8{,}8196;$$

$$1000\, r = 0{,}4769 \sqrt{\frac{2 \cdot 192 \cdot 808}{639\,224}} = 0{,}3323;$$

für Mädchen

$$1000 R = 0{,}4769 \sqrt{\frac{2 \cdot 1196}{9}} = 7{,}775;$$

$$1000\, r = 0{,}4769 \sqrt{\frac{2 \cdot 163 \cdot 837}{605\,695}} = 0{,}3201.$$

Demnach wird das Stabilitätskriterium für Knaben

$$Q = \frac{1000 R}{1000 r} = \frac{8{,}8196}{0{,}3323} = 26{,}5,$$

für Mädchen

$$Q = \frac{1000 R}{1000 r} = \frac{7{,}775}{0{,}3201} = 24{,}3.$$

Durch eine Zusammenstellung der erhaltenen Zahlen wird uns eine instruktive Übersicht über die interessante Erscheinung gegeben. Wir fanden für Q:

Zeitraum	Knaben	Mädchen
1891—1900	12,1	10,2
1896—1905	19,5	18,3
1901—1910	26,5	24,3

Die physische Schwankungskomponente $1000p = 1000R$ betrug:

Zeitraum	Knaben	Mädchen
1891—1900	4,36	3,56
1896—1905	6,75	6,12
1901—1910	8,82	7,78

Die Zahlen entsprechen ganz unseren Erwartungen. In der Periode von 1891 bis 1900 kam die Senkung der Sterblichkeit nicht zum Ausdruck, die Sterblichkeit machte hier aber größere Oszillationen, die noch weit über das Maß rein zufälliger Schwankungen hinausgehen, aus Gründen, die wieder eng mit der Erscheinung der Kindersterblichkeit verknüpft sind, wegen außerordentlicher Empfindlichkeit des kindlichen Organismus gegenüber gewissen Krankheiten. Daher ist neben der normalzufälligen noch eine starke physische Schwankungskomponente vorhanden, die subnormale Stabilität veranlaßt. Aber welch ein Unterschied besteht zwischen den Zahlen für die erste und zweite Periode von 1896 bis 1905 und noch mehr für die jüngste Periode von 1901 bis 1910. Das Plus in den Maßen für die letzten Zeiträume können wir auf Rechnung der Senkung der Sterblichkeit setzen; denn in den beiden letzten Perioden kommt ja vor allem noch die Wirkung dieser Erscheinung hinzu. Durch einen Vergleich der für die drei Perioden erhaltenen Zahlenwerte studieren wir also einmal den Einfluß der Senkung der Sterblichkeit auf die Stabilität, sodann aber auch umgekehrt, und das ist das Wichtige, durch die Maße der Stabilität und Dispersion die zahlenmäßige Entwickelung dieser Erscheinung im Laufe der Zeit.

Bei den übrigen Altersklassen wird sich natürlich dieselbe Erscheinung wiederspiegeln; denn eine Senkung der Sterblichkeit

hat doch vor allem in der Besserung der hygienischen Verhältnisse, den Fortschritten der medizinischen Wissenschaft ihren Grund, und es wäre nicht einzusehen, weshalb nur die erste Altersklasse diese Vorteile allein genießen sollte. Es würde aber hier zu weit führen, für jede der sechs Altersklassen den Beweis mit Hilfe der Stabilitätsuntersuchungen anzutreten. Es wird genügen, etwa als Stichprobe die sechste Altersklasse herauszugreifen und dort die Rechnung für die Zeiträume (Geburtsjahre) von 1891 bis 1900 und von 1896 bis 1905 durchzuführen.

Wieder wird eine Übersicht über die Sterbenswahrscheinlichkeiten zur vorläufigen Orientierung geeignet sein.

Geburtsjahr	Knaben	Mädchen	Geburtsjahr	Knaben	Mädchen
1891	0,007 02	0,007 16	1899	0,006 24	0,006 55
1892	0,006 40	0,006 49	1900	0,005 43	0,005 44
1893	0,006 75	0,006 80	1901	0,005 34	0,005 28
1894	0,007 19	0,007 18	1902	0,005 22	0,005 22
1895	0,007 16	0,006 92	1903	0,005 33	0,005 21
1896	0,006 80	0,006 83	1904	0,004 81	0,004 88
1897	0,006 60	0,006 65	1905	0,004 65	0,004 43
1898	0,006 04	0,006 41			

Was ergibt nun die Rechnung mit Hilfe des Stabilitätskriteriums für die sechste Altersklasse? Für die Periode von 1891 bis 1900 wären folgende Mittelwerte zu benutzen:

a) Knaben.

	$10^3\ v$	$10^3\ \delta$	$10^6\ \delta^2$
1891	7,0	+ 0,4	0,16
1892	6,4	— 0,2	0,04
1893	6,7	+ 0,1	0,01
1894	7,2	+ 0,6	0,36
1895	7,2	+ 0,6	0,36
1896	6,8	+ 0,2	0,04
1897	6,6	± 0,0	0,00
1898	6,0	— 0,6	0,36
1899	6,2	— 0,4	0,16
1900	5,4	— 1,2	1,44
	65,5 : 10 = 6,55		2,93 = $10^6[\delta^2]$
	rund 6,6 = $10^3\ v$		

b) Mädchen.

	$10^3 v$	$10^5 \delta$	$10^6 \delta^2$
1891	7,2	+0,5	0,25
1892	6,5	−0,2	0,04
1893	6,8	+0,1	0,01
1894	7,2	+0,5	0,25
1895	6,9	+0,2	0,04
1896	6,8	+0,1	0,01
1897	6,7	±0,0	0,00
1898	6,4	−0,3	0,09
1899	6,6	−0,1	0,01
1900	5,4	−1,3	1,69
	66,5 : 10 = 6,65 rund 6,7 = $10^3 v$		2,39 = $10^6[\delta^2]$

Als Grundzahlen ergeben sich hier:

a) Knaben.

393 405
449 368
842 773 : 2 = 421 387 = g,

b) Mädchen.

390 330
446 057
836 387 : 2 = 418 194 = g,

so daß sich die Werte ergeben:

$$1000\,R = 0{,}4769\sqrt{\frac{2\,.\,2{,}93}{9}} = 0{,}384\,82,$$

$$1000\,r = 0{,}4769\sqrt{\frac{2\,.\,6{,}6\,.\,993{,}4}{421\,387}} = 0{,}084\,126$$

für Knaben, sowie:

$$1000\,R = 0{,}4769\sqrt{\frac{2\,.\,2{,}39}{9}} = 0{,}347\,56,$$

$$1000\,r = 0{,}4769\sqrt{\frac{2\,.\,6{,}7\,.\,993{,}3}{418\,194}} = 0{,}085\,08$$

für Mädchen.

Also wird das Stabilitätskriterium für Knaben:

$$Q = \frac{1000\,R}{1000\,r} = \frac{0{,}3848}{0{,}08413} = 4{,}6;$$

für Mädchen:

$$Q = \frac{1000\,R}{1000\,r} = \frac{0{,}3476}{0{,}08508} = 4{,}1.$$

Wir gehen schließlich zur Untersuchung des Zeitraumes von 1896 bis 1905 über. Hier haben wir für v und $[\delta^2]$ die Werte zu nehmen:

a) Knaben.

	$10^3 v$	$10^3 \delta$	$10^6 \delta^2$
1896	6,8	+ 1,2	1,44
1897	6,6	+ 1,0	1,00
1898	6,0	+ 0,4	0,16
1899	6,2	+ 0,6	0,36
1900	5,4	— 0,2	0,04
1901	5,3	— 0,3	0,09
1902	5,2	— 0,4	0,16
1903	5,3	— 0,3	0,09
1904	4,8	— 0,8	0,64
1905	4,6	— 1,0	1,00
	56,2 : 10 = 5,62		4,98 = $10^6[\delta^2]$
	rund 5,6 = $10^3 v$		

b) Mädchen.

	$10^3 v$	$10^3 \delta$	$10^6 \delta^2$
1896	6,8	+ 1,1	1,21
1897	6,7	+ 1,0	1,00
1898	6,4	+ 0,7	0,49
1899	6,6	+ 0,9	0,81
1900	5,4	— 0,3	0,09
1901	5,3	— 0,4	0,16
1902	5,2	— 0,5	0,25
1903	5,2	— 0,5	0,25
1904	4,9	— 0,8	0,64
1905	4,4	— 1,3	1,69
	56,9 : 10 = 5,69		6,59 = $10^6[\delta^2]$
	rund 5,7 = $10^3 v$		

Als Grundzahlen sind in die Formeln einzusetzen:

a) Knaben.

436 371
479 297
915 668 : 2 = 457 834 = g_1

b) Mädchen.

432 411
474 135
906 546 : 2 = 453 273 = g_1

so daß sich ergibt:

$$1000\,R = 0{,}4769\,\sqrt{\frac{2\,.\,4{,}98}{9}} = 0{,}5017,$$

$$1000\,r = 0{,}4769\,\sqrt{\frac{2\,.\,5{,}6\,.\,994{,}4}{457\,834}} = 0{,}074\,38$$

für Knaben, und:

$$1000\,R = 0{,}4769\,\sqrt{\frac{2\,.\,6{,}59}{9}} = 0{,}577\,12,$$

$$1000\,r = 0{,}4769\,\sqrt{\frac{2\,.\,5{,}7\,.\,994{,}3}{453\,273}} = 0{,}075\,415$$

für Mädchen.

Es resultiert das Stabilitätskriterium für Knaben:

$$Q = \frac{1000\,R}{1000\,r} = \frac{0{,}5017}{0{,}07438} = 6{,}8,$$

für Mädchen:

$$Q = \frac{1000\,R}{1000\,r} = \frac{0{,}57712}{0{,}075415} = 7{,}7.$$

Diese Werte, die wir zur besseren Übersicht zusammenstellen, bestätigen sehr schön unsere Theorie.

Für Q fanden wir:

Zeitraum	Knaben	Mädchen
1891—1900	4,6	4,1
1896—1905	6,7	7,7

Die physische Schwankungskomponente ($1000\,p$ = „annähernd“ $1000\,R$) nahm dabei die Werte an:

Zeitraum	Knaben	Mädchen
1891—1900	0,38	0,35
1896—1905	0,50	0,58

In der ersten Periode von 1891 bis 1900, wo die Senkung der Sterblichkeit erst in der zweiten Hälfte deutlich sichtbar wird, ist ein bedeutend kleinerer Wert der Dispersion zu verzeichnen als in der Periode von 1896 bis 1905, in der die Senkung durchweg zu beobachten ist. Ganz offenbar beruht auch

hier der Werteunterschied auf dieser Erscheinung. Jedoch nimmt hier die Senkung der Sterblichkeit unter dem Ursachenkomplex der übernormalen Dispersion eine ganz andere Stellung ein als bei der ersten Altersklasse. Dort hatten wir in der Periode von 1891 bis 1900 ein Beispiel, wo die Senkung der Sterblichkeit sehr zurücktrat. Dennoch war ein sehr großer Wert für die physische Dispersion zu verzeichnen. Es lagen dort, wie oben schon hervorgehoben, Ursachen, die in dem noch wenig widerstandsfähigen Organismus der Kinder begründet waren, vor, die bei der Erzeugung übernormaler Dispersion eine dominierende Stellung einnahmen. Ganz anders liegen die Verhältnisse bei der sechsten Altersklasse. Hier ist der Organismus schon so gekräftigt, daß er den Wechselfällen des Lebens leichter trotzt. Das kommt zahlenmäßig in geringeren Schwankungen der Sterblichkeitszahlen zum Ausdruck, die hier einen mehr zufälligen Charakter haben. Wir haben infolgedessen bei dieser Altersklasse durchweg stabilere Verhältnisse, wiewohl noch reichlich übernormale Dispersion vorhanden ist. Die Ursache liegt, wie wir gezeigt haben, wesentlich in der Senkung der Sterblichkeit, die im Laufe der Jahre die Grundwahrscheinlichkeit erheblich ändert. Bei dieser Altersklasse nimmt daher diese Erscheinung die erste Stelle ein unter den Ursachen übernormaler Dispersion.

Wir haben damit den interessanten Verlauf der Senkung der Sterblichkeit in den Jahren 1891 bis 1910 mit Hilfe von Stabilitätsuntersuchungen verfolgt. Auffallend bleibt bei der Erscheinung das günstige Resultat einer sehr rapiden Abnahme für die letzten Jahre, und es scheint fast, als ob hierin ein natürliches Gegengewicht gegen die in jüngster Zeit gleichfalls beobachtete Abnahme der Geburtenziffer zum Ausdruck kommt, welches einem Stillstand oder gar Rückgang der Bevölkerung vorbeugen will.

III.

Durch die Stabilitätsuntersuchungen der Sterbenswahrscheinlichkeiten der ersten sechs Altersjahre sind wir in die Lage versetzt, ohne weiteres auch eine Absterbeordnung[1]) zur Darstellung der Kindersterblichkeit zusammenzustellen. Darunter ist die Reihenfolge der Überlebenden aus einer bestimmten Generation zu verstehen. Diese Tabelle würde also durch Abzug der ersten Hauptgesamtheiten von Verstorbenen von den Lebendgeborenen eines Jahres und den Überlebenden jedes folgenden Altersjahres zustande kommen und in symbolischer Schreibweise lauten:

$$\begin{aligned} {}_nG &= {}_nL_0^1, \\ {}_nG - {}_nM_1^1 &= {}_nL_1^1, \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ {}_nG - [{}_nM_1^1 + \cdots {}_nM_6^1] &= {}_nL_6^1. \end{aligned}$$

Vergleichbar dargestellt wird diese Absterbeordnung durch eine Berechnung der Überlebenden auf 100 000 Geborene mit Hilfe der Formel:

$$\frac{{}_nL_x^1 \cdot 10^5}{{}_nG}; \quad x = 0, 1, 2 \ldots 6.$$

Endlich gibt die Reihe der Überlebenswahrscheinlichkeiten:

$$\frac{1 - {}_nM_x^1}{{}_nL_{x-1}^1}; \quad x = 1, 2 \ldots 6,$$

die Chancen in jeder Altersklasse an.

Wir erhalten durch diese Methode insofern eine genaue Darstellung der Kindersterblichkeit, als die wirklich beobachteten Sterbefälle aus einer Generation zugrunde gelegt sind. Anders wäre es, wenn zu einer solchen Absterbeordnung eine Beobachtungszeit von mehreren Jahrzehnten verwendet würde oder gar eine Generation durch alle Altersstufen verfolgt würde. Hier entstände durch die Änderung der Sterblichkeit im Laufe der Jahre, etwa durch Senkung derselben, kein richtiges Bild der Sterb-

[1]) Hierbei ist die Ein- und Auswanderung unberücksichtigt gelassen, da sie in jenen Jahren in Deutschland unbedeutend war.

lichkeit. Aus diesem Grunde hat aber auch die Absterbeordnung der Kinder immer nur einen praktischen Wert für die betreffende Zeit, in der sie beobachtet ist. Durch die Änderung der hygienischen und sozialen Verhältnisse wird auch sie modifiziert. Es wird daher von Interesse sein, Absterbeordnungen verschiedener Generationen, etwa von 1891 und 1905, kennen zu lernen, wodurch die Änderung, hier speziell die Senkung der Sterblichkeit, zum Ausdruck kommt.

Absterbeordnung der Generation 1891.

Knaben.

x	L_x^1	$L_x^1 . 10^5/_n G$	$1 - M_x^1/L_{x-1}^1$	x
0	584 256	100 000		
			0,778 50	1
1	454 842	77 850		
			0,938 96	2
2	427 082	73 098		
			0,968 14	3
3	413 471	70 770		
			0,983 56	4
4	406 678	69 607		
			0,989 53	5
5	402 420	68 879		
			0,993 00	6
6	399 596	68 396		

Mädchen.

x	L_x^1	$L_x^1 . 10^5/_n G$	$1 - M_x^1/L_{x-1}^1$	x
0	553 907	100 000		
			0,812 27	1
1	449 923	81 227		
			0,941 56	2
2	423 629	76 480		
			0,970 20	3
3	411 006	74 202		
			0,984 28	4
4	404 552	73 035		
			0,989 78	5
5	400 418	72 288		
			0,992 86	6
6	397 552	71 773		

Absterbeordnung der Generation[1]) 1905.

Knaben.

x	L_x^1	$L_x^1 . 10^5/_n G$	$1 - M_x^1/L_{x-1}^1$	x
0	638 038	100 000		
			0,795 69	1
1	507 682	79 569		
			0,958 76	2
2	486 742	76 287		
			0,985 53	3
3	479 702	75 183		
			0,990 74	4
4	475 258	74 487		
			0,993 83	5
5	472 317	74 027		
			0,995 34	6
6	470 122	73 682		

Mädchen.

x	L_x^1	$L_x^1 . 10^5/_n G$	$1 - M_x^1/L_{x-1}^1$	x
0	603 582	100 000		
			0,826 55	1
1	498 893	82 655		
			0,961 02	2
2	479 434	79 433		
			0,986 08	3
3	472 761	78 327		
			0,991 10	4
4	468 563	77 630		
			0,993 90	5
5	465 691	77 156		
			0,995 58	6
6	463 626	76 814		

Es erreichten also von den im Jahre 1891 Geborenen das Alter von genau 6 Jahren 68,4 Proz. Knaben und 71,8 Proz. Mädchen, von den im Jahre 1905 Geborenen aber 73,7 Proz. Knaben und 76,8 Proz. Mädchen.

[1]) Vgl. die Elementargesamtheiten für 1906 bis 1910, S. 12, 13, 14.

Lebenslauf.

Der Verfasser, Karl Stalmann, braunschweigischer Staatsangehöriger, ist am 14. November 1889 zu Braunschweig geboren. Das Gymnasium besuchte er in Braunschweig und bestand dort Michaelis 1909 die Reifeprüfung. Zum Studium der Mathematik und Staatswissenschaften ging er dann zunächst im Wintersemester 1909/10 nach Leipzig. Die folgenden Semester studierte er in Göttingen, wo er im Sommer 1913 das Oberlehrerexamen bestand. Seit Michaelis 1913 leistet er am Herzoglichen Wilhelm-Gymnasium zu Braunschweig sein Seminarjahr ab.